participación de los colegas. Dos acciones que refuerzan el proyecto son la conformación de equipos interdisciplinarios e interinstitucionales.

2. *Elegir objetivos adecuados*. Los objetivos de cada proyecto deben ser *pertinentes* porque plantean una solución posible a un problema existente, *viables* porque la posibilidad de su ejecución debe ser producto de un cálculo de fortalezas y debilidades del equipo ejecutante. La clasificación anterior en las cuatro líneas mencionadas tiene la ventaja de sumar logros objetivos como publicaciones, tesis, asesorías, servicios, etc. que demuestran que el grupo tiene antecedentes que respaldan la viabilidad del proyecto.

Los proyectos referidos al medio ambiente son variados. Si se orientan a la actividad industrial, deberán ofrecer soluciones que reduzcan costos por penalidades a la empresa que contamina. Desde otro punto de vista, podrían plantearse proyectos dirigidos a la eliminación de algún tipo de contaminante típico de una localidad o región. En este caso, el receptor de los resultados del proyecto sería el ministerio de salud o de la producción.

El grupo de productos naturales deberían vincularse con grupos de farmacia, medicina o biólogos para explotar los beneficios de los principios activos y no limitarse a su identificación.

Los proyectos en materiales deberían estar vinculados a partes de dispositivos, o sustitutos mejorados de materiales convencionales. Una alternativa interesante lo constituyen materiales con propiedades específicas que permiten la eliminación de contaminantes, por lo que podrían combinar los grupos de materiales y los de medio ambiente.

Los proyectos vinculados a energía, en los que mostramos fortalezas son aquellos referidos a energías renovables o fuentes alternativas de baja contaminación. Dos temas interesantes y novedosos en nuestro medio son los sistemas de refrigeración solar y las celdas de combustibles.

Estas son sólo algunas consideraciones preliminares para empezar un plan de elaboración de proyectos y definición de líneas prioritarias de investigación. El proyecto BID tiene altas probabilidades de llevarse a cabo y no podemos dejar pasar esta oportunidad. Está claro que no son recursos humanos calificados lo que nos falta, sino tal vez, la capacidad de buscar acuerdos con horizontes de mediano y largo plazo.

Dr. Abel Gutarra Espinoza
Director del Instituto de Investigación

Suma de Momentos Angulares

H.G.Valqui /Facultad de Ciencias-UNI

RESUMEN

Para hallar los valores y vectores propios del (cuadrado del) operador suma **S = A + B** de dos operadores angulares, **A** y **B**, usualmente se recurre a los llamados coeficientes de Clebsch-Gordan. En el presente artículo consideramos el caso de dos operadores 'pequeños', para mostrar cómo se pueden calcular, en forma más o menos directa, los vectores y valores propios de la suma, sin tener que recurrir a los mencionados coeficientes.

ABSTRACT

In order to get the proper values and proper vectors of the (squared) sum of two angular operators, **S = A + B**, one usually applies the so called Clebsch-Gordan coefficients. In the present article we handle the case of two "little operators" to show how we can get directly that proper values and proper vectors, without making use of such coefficients.

NOTA. Por comodidad tipográfica, escribiremos: $[a\ b\ c] \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

I. El momento angular

01: Recordemos que un operador vectorial, $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ es llamado operador de momento angular si, y sólo si, satisface la ecuación $\mathbf{M} \times \mathbf{M} = i\hbar\mathbf{M}$ o, equivalentemente, $[M_j, M_k] = i\hbar\, \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k \bullet \mathbf{M}$, donde el corchete indica la operación de conmutación, y los vectores $\mathbf{e}_k$ son: $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]$, $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]$.

02: Dadas las matrices:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que satisfacen las relaciones: $[P, Q] = 2R$, $[Q, R] = P$, $[R, P] = -Q$, podemos construir los operadores:

$$A_1 = (\hbar/\sqrt{2})\, P \quad , \quad A_2 = i\,(\hbar/\sqrt{2})\, Q \quad , \quad A_3 = \hbar R \ ,$$

que satisfacen las condiciones para ser las componentes de un momento angular:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = i\hbar\, \mathbf{A}$$

03: Por otra parte, con $\mathbf{A}^2 \equiv A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, verificamos que $\mathbf{A}^2 = 2\hbar^2\mathbf{I}$, de donde resulta evidente que $\mathbf{A}^2$ conmuta con cada una de sus 3 componentes.

04: Los 3 vectores propios de la matriz P son:

$$\mathbf{p}_1 = [1 \ \ -\sqrt{2} \ \ 1] \quad , \quad \mathbf{p}_2 = [1 \ \ 0 \ \ -1] \quad , \quad \mathbf{p}_3 = [1 \ \ \sqrt{2} \ \ 1],$$

con los valores propios $-\sqrt{2}$, 0 , $\sqrt{2}$, respectivamente.

REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS-UNI

Aquellos vectores son también vectores propios de la matriz A_1, siendo $-\hbar$, 0 y $\hbar$ los correspondientes valores propios.

05: Los 3 vectores propios de Q son:

$$\mathbf{q}_1 = [-1 \ \ i\sqrt{2} \ \ 1] \ , \quad \mathbf{q}_2 = [1 \ \ 0 \ \ 1] \quad , \quad \mathbf{q}_3 = [1 \ \ i\sqrt{2} \ \ -1],$$

con los valores propios $i\sqrt{2}$, 0 , $-i\sqrt{2}$, respectivamente.

Tales vectores son también vectores propios de la matriz A_2, siendo $-\hbar$, 0 y $\hbar$ los correspondientes valores propios.

06: Los vectores propios de R son:

$$\mathbf{r}_1 = [0 \ \ 0 \ \ 1] \ , \quad \mathbf{r}_2 = [0 \ \ 1 \ \ 0] \quad , \quad \mathbf{r}_3 = [1 \ \ 0 \ \ 0]$$

con los valores propios -1 , 0 y 1 , respectivamente.

Tales vectores son también vectores propios de la matriz A_3, siendo $-\hbar$, 0 y $\hbar$, los correspondientes valores propios.

07: Nótese que, en cada terna de vectores propios, los vectores son ortogonales; pero ellos no están normalizados (excepto en el tercer caso).

08: Por otra parte, construyamos las dos matrices $A_\sigma = A_1 + i\sigma A_2$, donde $\sigma^2 = 1$. Es decir, $A_\sigma = \hbar(1/\sqrt{2})\, P + i\sigma\hbar\, (i/\sqrt{2})\, Q$; es decir,

$$A_\sigma = (\hbar/\sqrt{2})\, (P - \sigma Q)$$

09: Si aplicamos el operador A_σ a los vectores propios de A_3, obtenemos los siguientes resultados:

$$A_- \mathbf{r}_1 = 0 \qquad\qquad A_+ \mathbf{r}_1 = \hbar\sqrt{2}\ \mathbf{r}_2$$

$$A_- \mathbf{r}_2 = \hbar\sqrt{2}\ r_1 \qquad\qquad A_+ \mathbf{r}_2 = \hbar\sqrt{2}\ \mathbf{r}_3$$

$$A_- \mathbf{r}_3 = \hbar\sqrt{2}\ \mathbf{r}_2 \qquad\qquad A_+ \mathbf{r}_3 = 0$$

que ponen en evidencia la capacidad de A_σ para bajar o subir los estados $\mathbf{r}_k$.

10: Por otra parte, tenemos que las matrices:

$$B_1 = \hbar/2 \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & -cos\theta \end{pmatrix} \;,\; B_2 = \hbar/2 \begin{pmatrix} -sen\theta & cos\theta \\ cos\theta & sen\theta \end{pmatrix} \;,\; B_3 = i\,\hbar/2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

las mismas que, para cualquier valor de θ, satisfacen la relación

$$\mathbf{B} \times \mathbf{B} = i\,\hbar\,\mathbf{B}$$

y tienen los vectores y valores propios (dobles):

$\mathbf{b}_1 = [\text{sen}\theta \;\; \in - \cos\theta]$, $\mathbf{b}_2 = [\cos\theta \;\; -\in + \text{sen}\theta]$, $\mathbf{b}_3 = [1 \;\; i\in]$ con $\in^2 = 1$

$$B_1\,\mathbf{b}_1 = \in \hbar/2\,\mathbf{b}_1 \quad , \quad B_2\mathbf{b}_2 = \in \hbar/2\,\mathbf{b}_2 \quad , \quad B_3\,\mathbf{b}_3 = \in \hbar/2\,\mathbf{b}_3$$

donde, como se puede apreciar, las 3 matrices poseen los mismos valores propios. Además se cumple, $\mathbf{B}^2 = 3\hbar^2/4\;\mathbf{I}$.

11: Para los operadores de bajada y de subida, obtenemos:

$$B_\in = B_1 + i\in B_2 \text{, es decir,} \quad B_\in = (\hbar/2)\,e^{-i\in\theta} \begin{pmatrix} 1 & i\in \\ i\in & -1 \end{pmatrix}$$

Estos operadores, actuando sobre los vectores propios de B_3 , $\mathbf{v}_1 = [1 \;\; -i]$, $\mathbf{v}_2 = [1 \;\; i]$, tienen los siguientes efectos:

$$B_-\;\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \qquad\qquad B_-\;\mathbf{v}_2 = \hbar\,e^{i\theta}\,\mathbf{v}_1 \,,$$
$$B_+\,\mathbf{v}_1 = \hbar\,e^{-i\theta}\;\mathbf{v}_2 \,, \qquad\qquad B_+\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

12: Por otra parte, si $\langle u \,,\, p\rangle_U$ es un producto interno en el espacio U; $\langle v \,,\, q\rangle_V$ es un producto interno en el espacio V, entonces se puede demostrar que el producto numérico de los productos internos, $\langle (u \,,\, v) \,,\, (p \,,\, q)\rangle = \langle u \,,\, p\rangle_U\,\langle v \,,\, q\rangle_V$, es un producto interno en el espacio (U , V).

REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS-UNI

Por ejemplo, en (U , V), el producto interno

$$\begin{aligned}
&\langle p\,(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1) + e^{i\theta}\,(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2) \,,\; e^{-i\theta}\,(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1) - p^*\,(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2)\rangle = \\
&\langle p\,(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1) \,,\; e^{-i\theta}\,(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1)\rangle - \langle p\,(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1) \,,\, p^*\,(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2)\rangle + \\
&\langle e^{i\theta}\,(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2) \,,\, e^{-i\theta}\,(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1)\rangle - \langle e^{i\theta}\,(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2) \,,\; p^*(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2)\rangle = \\
&p^*\,e^{-i\theta}\,\langle(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1) \,,\; (\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1)\rangle - p^*p\,\langle(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1) \,,\, (\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2)\rangle + \\
&\langle(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2) \,,\, (\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1)\rangle - p^*\,e^{-i\theta}\,\langle(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2) \,,\; (\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2)\rangle = \\
&p^*\,e^{-i\theta}\,\langle \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_2\rangle\,\langle \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1\rangle - p^*p\,\langle \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_1\rangle\,\langle \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2\rangle + \\
&\langle \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2\rangle\,\langle \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_1\rangle - p^*\,e^{-i\theta}\,\langle \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_1\rangle\,\langle \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_2\rangle = \\
&p^*\,e^{-i\theta}\,1 \times 2^{1/2} - 0 \times 0 + 0 \times 0 - p^*\,e^{-i\theta}\;1 \times 2^{1/2} = 0 \,,
\end{aligned}$$

por lo cual los citados vectores son ortogonales.

II. El problema de la suma de dos momentos angulares

13: Aclaremos la situación que estamos considerando. Tenemos dos sistemas físicos independientes (no interactúan entre sí), el primero descrito en un espacio de Hilbert U, el segundo descrito en un espacio de Hilbert V (en realidad, en este caso se trata de espacios vectoriales de dimensión 3 y 2, respectivamente). Sobre dichos espacios actúan los operadores de momento angular:

$$A_k : U \to U \,, \qquad B_k : V \to V$$

14: Nuestro objetivo consiste en considerar un sistema físico que incluya a los dos sistemas independientes, para construir el operador de momento angular total, y determinar sus correspondientes vectores y valores propios.

15: Como los estados del sistema compuesto están constituidos por todos los pares de estados posibles, de cada uno de los dos sistemas, entonces, el espacio vectorial compuesto estará formado por todos los pares ordenados de vectores (u, v) , donde $u \in U$, $v \in V$. Si $\{e_k\}$ y $\{f_k\}$ son bases de U y V, respectivamente, entonces $\{(e_i \,,\, f_j)\}$ será una base del espacio compuesto, cumpliéndose que:

$$u = \sum_i \alpha_i e_i , \quad v = \sum_j \beta_j f_j \quad \Rightarrow \quad (u , v) = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j (e_i , f_j)$$

16: Por otra parte, si M, N son operadores, tales que $M: U \to U$, $N : V \to V$ definiremos el operador $M \otimes N: (U, V) \to (U, V)$ de manera que $M \otimes N(u , v) = (Mu, Nv)$, donde podemos verificar que $(M_1M_2) \otimes (N_1N_2) = (M_1 \otimes N_1)(M_2 \otimes N_2)$.

17: Si I_U , I_V son los operadores identidades en los espacios indicados, entonces podemos escribir $M \otimes I_V(u , v) = (Mu , v)$ y $I_U \otimes N(u , v) = (u , Nv)$.

Entonces, podemos verificar directamente que:

i. $(M \otimes I_V) (I_U \otimes N) = (I_U \otimes N)(M \otimes I_V)$,
ii. $(M^2 \otimes I_V) = (M \otimes I_V)^2$,
iii. $(I_U \otimes N^2) = (I_U \otimes N)^2$,
iv. $(M \otimes I_V + I_U \otimes N) (X \otimes I_V + I_U \otimes Y) = (MX) \otimes I_V + M \otimes Y + X \otimes N + I_U \otimes (NY)$

NOTA: En lo que sigue, siempre que esté claro sobre cuál espacio actúa el operador considerado, escribiremos simplemente, M(u ,v) en vez de $M \otimes I_V(u, v)$, y N(u ,v) en vez de $I_U \otimes N(u , v)$.

18: La suma de los operadores M + N no tiene propiamente sentido, pues ambos operadores actúan en espacios distintos. Pero, en el espacio (U , V) si tiene sentido hablar de la suma de los operadores $M \otimes I_V$ y $I_U \otimes N$, es decir,

$$M \otimes I_V + I_U \otimes N, \text{ donde } (M \otimes I_V + I_U \otimes N)(u , v) = (Mu , v) + (u , Nv)$$

19: Sean p , q vectores propios de M y N, respectivamente: $Mp = \lambda p$, $Nq = \zeta q$, entonces $M \otimes I_V(p , v) = \lambda(p , v)$, $I_U \otimes N(u , q) = \zeta(u , q)$, donde u , v son vectores arbitrarios. Escribiremos simplemente : $M(p , v) = \lambda(p , v)$, $N(u , q) = \zeta(u , q)$.

III. El caso de A + B

20: En el caso de los operadores de momento angular, **A** y **B**, definimos la suma $\mathbf{S} = A \otimes I_V + I_U \otimes \mathbf{B}$, cuyas componentes son $S_k = A_k \otimes I_V + I_U \otimes B_k$, k = 1, 2, 3. Podemos verificar que estas componentes efectivamente satisfacen las condiciones para que **S** sea un operador de momento angular, es decir, $\mathbf{S} \times \mathbf{S} = i\hbar\, \mathbf{S}$. Deseamos construir todos los vectores propios comunes a los operadores $\mathbf{S}^2$ y S_3.

21: Sean $S_\in = S_1 + i\in S_2$, con $\in^2 = 1$, los operadores de 'subida' y de 'bajada' Como sabemos dicho operador conmuta con $\mathbf{S}^2$, es decir, $\mathbf{S}^2 S_\in = S_\in \mathbf{S}^2$. De allí obtenemos que $\mathbf{S}^2 (S_\in)^n = (S_\in)^n \mathbf{S}^2$.

22: Sea **w** un vector propio de $\mathbf{S}^2$, es decir, $\mathbf{S}^2\, \mathbf{w} = \lambda\, \mathbf{w}$; entonces verificamos que el vector $(S_\in)^n\, \mathbf{w}$, mientras no sea un vector nulo (pues para valores 'grandes' de n va a resultar nulo), será también vector propio de $\mathbf{S}^2$; específicamente, $\mathbf{S}^2 (S_\in)^n\, \mathbf{w} = \lambda\, (S_\in)^n\, \mathbf{w}$.

23: De $\mathbf{S}^2 = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 = (A_1 + B_1)^2 + (A_2 + B_2)^2 + (A_3 + B_3)^2$, obtenemos, $\mathbf{S}^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + 2A_3 B_3 + A_+ B_- + A_- B_+$

24: Anteriormente hemos visto que los operadores $\mathbf{A}^2$, A_3 poseen tres vectores propios comunes, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, mientras que $\mathbf{B}^2$, B_3 poseen dos vectores propios comunes: $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Entonces podemos verificar directamente que los (seis) pares ordenados $(\mathbf{u}_j , \mathbf{v}_k)$ son vectores propios del cuarteto $\mathbf{A}^2$, A_3 , $\mathbf{B}^2$, B_3 , en el espacio (U , V). Es decir, dichos vectores son también vectores propios del operador S_3 y del operador $T \equiv \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + 2A_3 B_3$.

25: Entonces, aquellos vectores, de entre los seis, que también sean vectores propios del operador $Z = A_+ B_- + A_- B_+$, serán, también, vectores propios de $\mathbf{S}^2$.

Sabemos que $A_+\, \mathbf{r}_3 = A_-\, \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$, $B_+\, \mathbf{v}_2 = B_-\, \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, en sus correspondientes espacios. Entonces, los vectores $(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1)$ y $(\mathbf{r}_3 , \mathbf{v}_2)$ son vectores propios de Z. En efecto: $Z(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1) = Z(\mathbf{r}_3 , \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$.

Es decir, los vectores $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2)$ y $(\mathbf{r}_3, \mathbf{v}_2)$ son vectores propios de $\mathbf{S}^2$.

26: Consideremos el vector $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2)$ y los vectores $(S_+)^n\, (\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2)$, que son vectores propios del operador $\mathbf{S}^2$:

$$(S_+)^0\, (\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1) = (\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1) \equiv \mathbf{w}_1$$

$$(S_+)^1\, (\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1) = \{ 2^{1/2}\, (\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1) + e^{-i\theta}\, (\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2)\}\, \hbar \equiv \mathbf{w}_2\, \hbar$$

$(S_+)^2\,(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1) = 2\,\{(\mathbf{r}_3 , \mathbf{v}_1) + 2^{1/2}\, e^{-i\theta}\,(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_2)\}\,\hbar^2 \equiv 2\,\mathbf{w}_3\,\hbar^2$

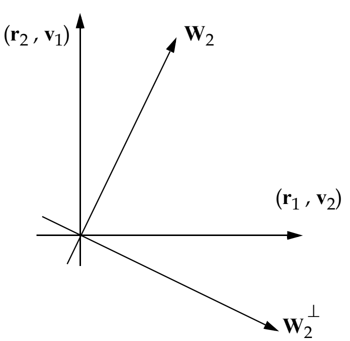
$(S_+)^3\,(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1) = 6\, e^{-i\theta}\,(\mathbf{r}_3 , \mathbf{v}_2)\,\hbar^3 \equiv 6\, e^{-i\theta}\,\mathbf{w}_4\,\hbar^3$

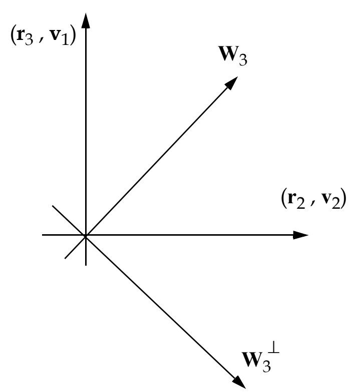
$(S_+)^4\,(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$

27: Podemos verificar, que los (cuatro) vectores obtenidos por la aplicación repetida de S_+ , son, por una parte, vectores propios de $\mathbf{S}^2$ con valor propio $15\hbar^2/4$, por otra parte son vectores propios de S_3 con los siguientes valores propios:

$S_3\,\mathbf{w}_1 = -\,3\hbar/2\,\mathbf{w}_1$, $S_3\,\mathbf{w}_2 = -\,\hbar/2\,\mathbf{w}_2$, $S_3\,\mathbf{w}_3 = \hbar/2\,\mathbf{w}_3$, $S_3\,\mathbf{w}4 = 3\hbar/2\,\mathbf{w}_4$

28: Hemos construido cuatro vectores propios de $\mathbf{S}^2$. Pero el espacio (U , V) que estamos considerando, caracterizado por el valor propio $2\hbar^2$ de $\mathbf{A}^2$ y el valor propio ¾ $\hbar^2$ de $\mathbf{B}^2$ tiene dimensión 6. Faltan dos vectores. La clave está en los vectores $\mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_3$. Cada uno de ellos pertenece a un subespacio 2-dimensional: el vector propio $\mathbf{w}_2$ pertenece al subespacio generado por los vectores $(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_1)$ y $(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2)$; el vector propio $\mathbf{w}_3$ pertenece al subespacio generado por los vectores $(\mathbf{r}_3 , \mathbf{v}_1)$ y + $(\mathbf{r}_2 , \mathbf{v}_2)$.





29: En el subespacio generado por $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1)$ y $(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2)$ construiremos un vector normal al vector $\mathbf{w}_2 = 2^{1/2}\,(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1) + e^{-i\theta}\,(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2)$. Dicho vector será (como se ha mostrado en 12): $\mathbf{w}_5 \equiv \mathbf{w}_2^{\perp} = 2^{1/2}\,(\mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_2) - e^{-i\theta}\,(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1)$.

Ahora podemos verificar que:

$$S_3\,\mathbf{w}_5 = -\,\hbar/2\,\mathbf{w}_5 \qquad \mathbf{S}^2\,\mathbf{w}_5 = 3/4\,\hbar^2\,\mathbf{w}_5$$

30: Para obtener el sexto vector tenemos dos posibilidades: i) Construir $\mathbf{w}_3^{\perp}$ ó ii) Aplicar el operador de subida a $\mathbf{w}_2$, es decir, obtener, $S_+\,\mathbf{w}_2^{\perp}$. Como verificación, ambos resultados deben coincidir.

En efecto $S_+\,\mathbf{w}_2^{\perp} . = S_{+.}\,[2^{1/2}\,(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2) - e^{-i\theta}\,(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1)] = (\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2) - 2^{1/2}\, e^{i\theta}\,(\mathbf{r}_3, \mathbf{v}_1) \equiv \mathbf{w}_6$, que, efectivamente, es ortogonal a $\mathbf{w}_3$. También podemos verificar que:

$$S_3\,\mathbf{w}_6 = \hbar/2\,\mathbf{w}_6 \qquad \mathbf{S}^2\,\mathbf{w}_6 = 3/4\,\hbar^2\,\mathbf{w}_6$$

31: Finalmente, para el caso aquí considerado, presentamos la tabla de los vectores propios de S_3 (lectura horizontal) y los de $\mathbf{S}^2$ (lectura vertical). Hemos considerado unas líneas más, para mostrar cómo debería seguir la tabla para casos "más grandes".

$\mathbf{S}^2\,\mathbf{w} = s(s + 1)\,\hbar^2\,\mathbf{w}$ $S_3\,\mathbf{w} = s_3\,\hbar\,\mathbf{w}$						$s = 1 + 1/2$
s_3 / s	5/2	3/2	1/2	–1/2	–3/2	–5/2
5/2						
3/2		$\boxed{\mathbf{w}_4}$	$\boxed{\mathbf{w}_3}$	$\boxed{\mathbf{w}_2}$	$\boxed{\mathbf{w}_1}$	
1/2			$\boxed{\mathbf{w}_6}$	$\boxed{\mathbf{w}_5}$		

Conclusiones

Dados los (2a + 1) vectores propios $|a\ ,\ p\rangle$ del operador **A** , y los (2b + 1) vectores propios $|b\ ,\ q\rangle$ del operador **B** , para construir los vectores propios de $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$, con abuso de lenguaje, procedemos de la forma siguiente:

1. Con s = a + b, consideramos el vector $|s\ ,\ -s\rangle$, y aplicando repetidamente el operador de subida S_+, construimos los (2s + 1) vectores de la forma $|s\ ,\ m\rangle$.

2. Se puede apreciar que el vector $|s\ ,\ -s+1\rangle$ es 2-dimensional; entonces se construye $|s-1\ ,\ -s+1\rangle$ ortogonal a $|s\ ,\ -s+1\rangle$.

3. Ahora se aplica repetidamente el operador de subida a $|s-1\ ,\ -s+1\rangle$, obteniendo los 2(s – 1) + 1 vectores de la forma $|s-1\ ,\ m\rangle$.

4. El vector $|s-1\ ,\ -s+2\rangle$ resulta pertenecer a un espacio 3-dimensional; entonces se construye el vector $|s-2\ ,\ -s+2\rangle$ ortogonal a los vectores $|s\ ,\ -s+2\rangle$ y $|s-1\ ,\ -s+2\rangle$ hallados anteriormente.

5. Luego se aplica repetidamente el operador S_+ al vector $|s-2\ ,\ -s+2\rangle$, obteniendo los 2(s – 2) + 1 vectores de la forma $|s-2\ ,\ m\rangle$.

6. Se continúa con este proceso iterativamente: i) Se construye $|s-3\ ,\ -s+3\rangle$ ortogonalmente a los vectores $|t\ ,\ -s+3\rangle$, con $t = s\ , s-1\ , s-2$, ii) Al vector $|s-3\ ,\ -s+3\rangle$ se le aplica el operador de subida S_+, para determinar los 2(s –3) + 1 vectores de la forma $|s-3\ ,\ m\rangle$. Este proceso es continuado hasta llegar a $t = b - a > 0$.

7. Puede verificarse directamente que en el proceso se han construido $\sum_{t=-s}^{s} (2t+1) = (2a+1)(2b+1)$ vectores propios de $\mathbf{S}^2$, y por lo tanto, vectores propios comunes al cuarteto de operadores $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{S}^2$ y S_3.

8. El proceso iterativo, tal como ha sido presentado puede ser cómodamente programado para ser procesado en una computadora. El mecanismo para obtener un vector ortogonal a n –1 vectores dados de un espacio n-dimensional puede verse en la referencia (1).

REVISTA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS-UNI

Bibliografía

1. H. G. Valqui, Apuntes de Álgebra, 2001.