

# Revisión del método Híbrido de Alto Orden para un problema elíptico de transmisión interior

Rommel Bustinza<sup>†</sup> y Jonathan Munguia La Cotera<sup>‡</sup>

*Departamento de Ingeniería Matemática & Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CIPMA), Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile;*  
*Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Rímac, Lima, Perú;*  
<sup>†</sup>rbustinz@ing-mat.udec.cl, <sup>‡</sup>jmunguial@uni.edu.pe

Recibido el 12 de noviembre de 2020; aceptado: 22 de diciembre de 2020

En este trabajo, se aproxima la solución de un problema de transmisión de flujos entre dos sustancias a través de una interfaz interior y una condición de frontera de tipo Neumann en la frontera exterior. Utilizamos para su aproximación el ya conocido método Híbrido de Alto Orden (con sus siglas en inglés HHO), que puede clasificarse como un método de Elementos Finitos (EF) de tipo Galerkin Discontinuo (GD). Describimos el modelo matemático, su formulación variacional a nivel continuo y el esquema HHO respectivo. Discutimos existencia y unicidad y presentamos resultados del orden de convergencia óptima de la solución potencial con respecto a una norma de energía y a la norma  $L^2$ . Finalmente, se proporcionan algunos ensayos numéricos, cuyos resultados están de acuerdo con la teoría descrita.

**Palabras Claves:** Problema elíptico de transmisión interior, Método híbrido de alto orden.

In this work, we approximate the solution of a transmission problem of the flux between two substances through an inner interface and a Neumann boundary condition at the exterior boundary. For that approximation, we use the well-known Hybrid High Order (HHO) method, which can be classified as a Discontinuous Galerkin (DG) Finite Element (FE) method. We describe the mathematical model, its variational formulation at the continuous level, and the respective HHO scheme. We discuss the existence and uniqueness of solution and present results of the optimal convergence order of the potential with respect to an energy norm and the  $L^2$ -norm. Finally, we provided some numerical tests, which are in agreement with the theory described.

**Keywords:** Interior transmission elliptic problem, generalized meshes, hybrid high order method.

## 1. Introducción

Los problemas de transmisión (también llamados problemas de interfaz), aparecen por ejemplo en la interacción de sólidos y fluidos [1, 2]. En el caso de dispositivos electromagnéticos compuestos por diferentes materiales [3], el flujo incompresible de dos fases presenta saltos en la presión y el gradiente de presión a través de su interfaz [4].

En este artículo consideramos dos dominios disjuntos. Sea  $\Omega_1$  un dominio acotado y simplemente conexo de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in 2, 3$ , con frontera Lipschitz continua  $\Gamma_1 := \partial\Omega_1$  y  $\Omega_2$  la región anular delimitada por  $\Gamma_1$  y una segunda curva Lipschitz continua  $\Gamma_2$ , que está estrictamente contenida en  $\mathbb{R}^d - \bar{\Omega}_1$  (ver Figura 1). Nosotros utilizaremos el método HHO que ya describimos para el problema de difusión variable [5, 6]. Para una mayor comprensión y otras aplicaciones del método HHO, sugerimos al lector revisar [7]. Nuestro problema es un problema de transmisión interior con mallas ajustadas a la interfaz. Es decir, la interfaz no corta ningún elemento de la malla. Esto nos permite manejar con comodidad interfaces poligonales e imponer con precisión las condiciones de salto sobre la interfaz. Además de extender las técnicas estándar del método HHO para problemas de difusión, pudiendo acoplar sin mucha dificultad las soluciones de cada subdominio. Aprovechar las bondades del método

HHO, como por ejemplo, para manejar mallas bastante generales con elementos poligonales y nodos colgantes; polinomios de alto orden y superconvergencia.

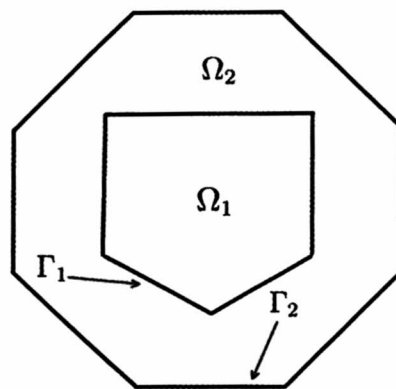


Figura 1. Geometría del problema.

En esta revisión, se realiza una ligera modificación del esquema HHO propuesto en [8]. También se ha abordado interfaces curvas que no se ajustan a los mallados de los subdominios usando el método HHO con un enfoque distinto [9], el cual deriva en un análisis a priori más complicado.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 2, se introduce el problema modelo, su formulación variacional y el estudio de su existencia y

unicidad. Los grados de libertad, los espacios discretos y los operadores discretos reconstructivos, son introducidos en la Sección 3, mientras que en la Sección 4 se obtiene la formulación discreta mixta según la filosofía HHO y se prueba que está bien puesto. El análisis de error a priori es descrito en la Sección 5, y finalmente en la Sección 6 se muestran algunos resultados numéricos.

## 2. Problema modelo

Consideramos el siguiente problema de transmisión: Encontrar  $u_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $u_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$-\Delta u_1 = f_1 \text{ in } \Omega_1, \quad (1a)$$

$$-\Delta u_2 = f_2 \text{ in } \Omega_2, \quad (1b)$$

$$u_1 - u_2 = g \text{ on } \Gamma_1, \quad (1c)$$

$$\nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2 = g_1 \text{ on } \Gamma_1, \quad (1d)$$

$$\nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2 = g_2 \text{ on } \Gamma_2, \quad (1e)$$

$$\int_{\Omega_1} u_1 + \int_{\Omega_2} u_2 = 0, \quad (1f)$$

donde  $f_1 \in L^2(\Omega_1)$  y  $f_2 \in L^2(\Omega_2)$  representan los términos fuentes,  $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$  el salto de traza del potencial sobre  $\Gamma_1$ ,  $g_1 \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$  el salto de la componente normal del flujo sobre  $\Gamma_1$  y  $g_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$  la componente normal del flujo sobre  $\Gamma_2$ .  $\mathbf{n}_1$  denota el vector normal unitario exterior a  $\Gamma_1$  y  $\mathbf{n}_2$  el vector normal unitario exterior a la frontera de  $\Omega_2$ , dada por  $\partial\Omega_2 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Por abuso de notación, denotamos la traza con su misma función. Imponemos la siguiente condición de compatibilidad, para garantizar que el problema esté bien puesto:

$$\int_{\Omega_1} f_1 + \int_{\Omega_2} f_2 + \int_{\Gamma_1} g_1 + \int_{\Gamma_2} g_2 = 0. \quad (2)$$

El punto de partida del método HHO es encontrar la formulación variacional mixta de (1). Así que, para cualquier subconjunto conexo  $X \subset \mathbb{R}^d$  con medida de Lebesgue distinta de cero, denotaremos al producto interno y a la norma del espacio de Lebesgue  $L^2(X)$  por  $(\cdot, \cdot)_X$  y  $\|\cdot\|_{0,X}$ , respectivamente. También, denotamos por  $Q := H^{-1/2}(\Gamma_1)$  al espacio dual de  $H^{1/2}(\Gamma_1)$  con su norma dual

$$\|f^*\|_{-1/2,\Gamma_1} := \sup_{\substack{f \in H^{1/2}(\Gamma_1) \\ f \neq 0}} \frac{(f^*, f)_{\Gamma_1}}{\|f\|_{1/2,\Gamma_1}} \quad \forall f^* \in H^{-1/2}(\Gamma_1), \quad (3)$$

donde  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_1}$  representa el emparejamiento dual de  $H^{-1/2}(\Gamma_1)$  y  $H^{1/2}(\Gamma_1)$  con respecto al producto interno  $L^2(\Gamma_1)$ , y análogamente para  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_2}$ .

Ahora introducimos el espacio de Hilbert

$$\mathbf{U} := \{(v_1, v_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) : (v_1, 1)_{\Omega_1} + (v_2, 1)_{\Omega_2} = 0\}, \quad (4)$$

dotado de la norma  $\|(u_1, u_2)\|_{\mathbf{U}}^2 := \|u_1\|_{1,\Omega_1}^2 + \|u_2\|_{1,\Omega_2}^2$ . Al aplicar integración por partes a las ecuaciones de

(1) y considerando la variable auxiliar  $\xi := \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$ , se obtiene la formulación variacional, que se lee: Encontrar  $((u_1, u_2), \xi) \in \mathbf{U} \times Q$  tal que

$$a((u_1, u_2), (v_1, v_2)) + b((v_1, v_2), \xi) = F((v_1, v_2)), \quad (5a)$$

$$b((u_1, u_2), \lambda) = G(\lambda) \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbf{U}, \quad \forall \lambda \in Q, \quad (5b)$$

donde  $a : \mathbf{U} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $b : \mathbf{U} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  son formas bilineales definidas como

$$a((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := (\nabla u_1, \nabla v_1)_{\Omega_1} + (\nabla u_2, \nabla v_2)_{\Omega_2},$$

$$b((v_1, v_2), \xi) := \langle \xi, v_1 - v_2 \rangle_{\Gamma_1}.$$

$F : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $G : Q \rightarrow \mathbb{R}$  son funcionales lineales definidas como

$$F((v_1, v_2)) := (f_1, v_1)_{\Omega_1} + (f_2, v_2)_{\Omega_2} + \langle g_1, v_1 \rangle_{\Gamma_1} + \langle g_2, v_2 \rangle_{\Gamma_2},$$

$$G(\lambda) := \langle \lambda, g \rangle_{\Gamma_1}.$$

Podemos definir el operador lineal acotado  $\mathbf{B} : \mathbf{U} \rightarrow Q$  inducido por la forma bilineal  $b$ , al notar que

$$\begin{aligned} b((v_1, v_2), \xi) &= \langle \xi, v_1 - v_2 \rangle_{\Gamma_1} = \langle \mathcal{R}(\xi), v_1 - v_2 \rangle_{1/2,\Gamma_1} \\ &= \langle \mathcal{R}^*(v_1 - v_2), \xi \rangle_{-1/2,\Gamma_1}, \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{R} : H^{-1/2}(\Gamma_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$  es una aplicación de Riesz,  $\mathcal{R}^* : H^{1/2}(\Gamma_1) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_1)$  el operador adjunto de Riesz, y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{r,\Gamma_1}$  el producto interno sobre  $H^r(\Gamma_1)$ ,  $r \in \{-1/2, 1/2\}$ . Entonces, definimos para todo  $(v_1, v_2) \in \mathbf{U}$ ,

$$\mathbf{B}((v_1, v_2)) := \mathcal{R}^*(v_1 - v_2). \quad (6)$$

Gracias a la biyectividad de  $\mathcal{R}^*$ , podemos definir el núcleo de  $\mathbf{B}$ , como

$$V := \text{Ker } \mathbf{B} = \{(v_1, v_2) \in \mathbf{U} : v_1 = v_2 \text{ on } \Gamma_1\}. \quad (7)$$

Ahora establecemos que la formulación variacional (5) tiene solución única.

**Proposición 2.1** (Bien puesto). *El problema continuo (5) está bien puesto.*

*Demostración.* Se deduce luego de aplicar la teoría de Babuška-Brezzi. Se demuestra que las formas bilineales  $a$  y  $b$  son acotados, que  $a$  es  $V$ -elíptica y finalmente la condición inf-sup de  $b$ . El análisis es similar a la prueba del Teorema 2.1 en [8].  $\square$

## 3. Marco discreto

Consideramos las notaciones utilizadas en [5, 6] para discretizar un dominio de  $\mathbb{R}^d$ , así como también las definiciones del operador potencial reconstructivo y de reducción local. Utilizaremos el subíndice  $i = 1, 2$  para referirnos a cada subdominio. Por simplicidad, consideraremos  $g_1 \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $g_2 \in L^2(\Omega_2)$ ,  $\Omega := \Omega_1 \cup \Gamma_1 \cup \Omega_2$ ,  $\mathcal{T}_h$  una malla de  $\Omega$ , satisfaciendo para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , que  $T \subset \bar{\Omega}_1$  o  $T \subset \bar{\Omega}_2$ , y que no existen nodos colgantes sobre la frontera de transmisión  $\Gamma_1$ . A continuación, introducimos las mallas inducidas por  $\mathcal{T}_h$ , sobre cada subdominio  $\bar{\Omega}_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , esto es

$$\mathcal{T}_{i,h} := \{T \in \mathcal{T}_h : T \subset \bar{\Omega}_i\},$$

Además, denotamos por  $\Gamma_{1,h}$  y  $\Gamma_{2,h}$ , las particiones de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , respectivamente, inducidas por  $\mathcal{T}_{2,h}$ . Dado  $k \geq 0$  el grado polinomial, definimos los grados de libertad global sobre cada subdominio:

$$\underline{U}_{\mathcal{T}_{i,h}}^k := \left( \prod_{T \in \mathcal{T}_{i,h}} \mathbb{P}_d^k(T) \right) \times \left( \prod_{F \in \mathcal{F}_{i,h}} \mathbb{P}_{d-1}^k(F) \right). \quad (8)$$

donde  $\mathcal{F}_{i,h}$  colecta las caras correspondientes a  $\mathcal{T}_{i,h}$ . Sea  $\underline{\mathbf{v}}_{i,h} := ((v_{i,T})_{T \in \mathcal{T}_{i,h}}, (v_{i,F})_{F \in \mathcal{F}_{i,h}}) \in \underline{U}_{\mathcal{T}_{i,h}}^k$  un elemento del subespacio discreto, Además, la restricción de  $\underline{\mathbf{v}}_{i,h}$  a cada elemento  $T \in \mathcal{T}_{i,h}$  es  $\underline{\mathbf{v}}_{i,T} := (v_{i,T}, (v_{i,F})_{F \in \mathcal{F}_T}) \in \underline{U}_{i,T}^k := \mathbb{P}_d^k(T) \times (\prod_{F \in \mathcal{F}_T} \mathbb{P}_{d-1}^k(F))$ , donde  $i = 1, 2$ . En caso no haya ambigüedad, se omitirá el subíndice  $i$ . Ahora, establecemos nuestros espacios de aproximación discretos:

$$\underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} := \left\{ \underline{\mathbf{v}}_h := (\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h}) \in \underline{U}_{\mathcal{T}_{1,h}}^k \times \underline{U}_{\mathcal{T}_{2,h}}^k : \sum_{i=1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_{i,h}} (v_{i,T}, 1)_T = 0 \right\}, \quad (9)$$

$$Q_h^k := \mathbb{P}_{d-1}^k(\Gamma_{1,h}) := \prod_{F \in \Gamma_{1,h}} \mathbb{P}_{d-1}^k(F). \quad (10)$$

De aquí en adelante, adoptamos la siguiente notación: Dado  $\lambda_h \in Q_h^k$ , denotamos  $\lambda_F := \lambda_h|_F$  para todo  $F \in \Gamma_{1,h}$ . Entonces, introducimos la caracterización  $\lambda_h := (\lambda_F)_{F \in \Gamma_{1,h}}$ . El espacio  $Q_h^k$  es provisto con la norma  $L^2$  ponderada:

$$\|\lambda_h\|_{\Gamma_{1,h}}^2 := \sum_{F \in \Gamma_{1,h}} h_F \|\lambda_F\|_{0,F}^2, \quad \forall \lambda_h \in Q_h^k. \quad (11)$$

Introducimos también la seminorma  $\|\cdot\|_h : \underline{U}_{\mathcal{T}_{1,h}}^k \times \underline{U}_{\mathcal{T}_{2,h}}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual es dada, para cada  $(\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h}) \in \underline{U}_{\mathcal{T}_{1,h}}^k \times \underline{U}_{\mathcal{T}_{2,h}}^k$ , por

$$\begin{aligned} \|(\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h})\|_h^2 &:= \|\underline{\mathbf{v}}_{1,h}\|_{1,\mathcal{T}_{1,h}}^2 + \|\underline{\mathbf{v}}_{2,h}\|_{1,\mathcal{T}_{2,h}}^2 \\ &+ \sum_{F \in \Gamma_{1,h}} h_F^{-1} \|v_{1,F} - v_{2,F}\|_{0,F}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

**Proposición 3.1.** La aplicación  $\|\cdot\|_h$  define una norma sobre  $\underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0}$ .

*Demostración.* Ver Proposición 4.1 de [8].  $\square$

Para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , se define el operador de reducción local  $\underline{\mathbf{I}}_T^k : H^1(T) \rightarrow \underline{U}_T^k$  tal que, para todo  $v \in H^1(T)$ ,

$$\underline{\mathbf{I}}_T^k v := (\pi_T^k v, (\pi_F^k v)_{F \in \mathcal{F}_T}), \quad (13)$$

donde  $\pi_T^k$  y  $\pi_F^k$  denotan las proyecciones ortogonales de  $L^2$  sobre  $\mathbb{P}_d^k(T)$  y  $\mathbb{P}_{d-1}^k(F)$ , respectivamente.

El correspondiente operador de reducción global  $\underline{\mathbf{I}}_{\mathcal{T}_h}^k : H^1(\Omega_i) \rightarrow \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^k$  es definido por

$$\underline{\mathbf{I}}_{\mathcal{T}_h}^k v := ((\pi_T^k v)_{T \in \mathcal{T}_{i,h}}, (\pi_F^k v)_{F \in \mathcal{F}_{i,h}}) \quad \forall v \in H^1(\Omega_i). \quad (14)$$

Para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , se define el **operador gradiente reestructivo local**  $G_T^k : \underline{U}_T^k \rightarrow \nabla \mathbb{P}_d^{k+1}(T)$  tal que,

para cada  $\underline{\mathbf{v}}_T := (v_T, (v_F)_{F \in \mathcal{F}_T}) \in \underline{U}_T^k$  y cada  $w \in \mathbb{P}_d^{k+1}(T)$ ,

$$\begin{aligned} (G_T^k \underline{\mathbf{v}}_T, \nabla w)_T &= (\nabla v_T, \nabla w)_T \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_T} (v_F - v_T, \nabla w \cdot \mathbf{n}_{TF})_F. \end{aligned} \quad (15)$$

Definimos también el operador potencial reestructivo  $p_T^{k+1} : \underline{U}_T^k \rightarrow \mathbb{P}_d^{k+1}(T)$  tal que, para todo  $\underline{\mathbf{v}}_T \in \underline{U}_T^k$ ,

$$\nabla p_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T := G_T^k \underline{\mathbf{v}}_T, \quad \int_T p_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T := \int_T v_T. \quad (16)$$

**Observación 3.1.** Utilizaremos propiedades de aproximación del operador  $p_T^{k+1} \underline{\mathbf{I}}_T^k$  aplicado a funciones con regularidad en  $H^{q+1+\delta}(T)$ , para  $q \in \{0, 1, \dots, k\}$  y  $\delta \in (1/2, 1]$ , lo cual nos permitirá realizar el análisis a priori. Ver Apéndice A para más detalle.

## 4. Formulación discreta del problema

Para formular el esquema HHO, definimos la siguiente forma bilineal  $a_h : \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} \times \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{aligned} a_h((\underline{\mathbf{u}}_{1,h}, \underline{\mathbf{u}}_{2,h}), (\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h})) &:= \\ A_h((\underline{\mathbf{u}}_{1,h}, \underline{\mathbf{u}}_{2,h}), (\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h})) &+ j_h((\underline{\mathbf{u}}_{1,h}, \underline{\mathbf{u}}_{2,h}), (\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h})). \end{aligned} \quad (17)$$

donde el término de consistencia  $A_h : \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} \times \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} \rightarrow \mathbb{R}$  y el término de estabilidad  $j_h : \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} \times \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} \rightarrow \mathbb{R}$  son definidos como

$$A_h((\underline{\mathbf{u}}_{1,h}, \underline{\mathbf{u}}_{2,h}), (\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h})) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (G_T^k \underline{\mathbf{u}}_T, G_T^k \underline{\mathbf{v}}_T)_T, \quad (18)$$

$$j_h((\underline{\mathbf{u}}_{1,h}, \underline{\mathbf{u}}_{2,h}), (\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h})) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} j_T(\underline{\mathbf{u}}_T, \underline{\mathbf{v}}_T), \quad (19)$$

siendo

$$\begin{aligned} j_T(\underline{\mathbf{u}}_T, \underline{\mathbf{v}}_T) &:= \\ \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{-1} (\pi_F^k(u_F - R_T^{k+1} \underline{\mathbf{u}}_T), \pi_F^k(v_F - R_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T))_F, \end{aligned}$$

con

$$R_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T := v_T + (p_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T - \pi_T^k p_T^{k+1} \underline{\mathbf{v}}_T).$$

También, introducimos la forma bilineal  $b_h : \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} \times Q_h^k \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual está definida como

$$\begin{aligned} b_h((\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h}), \lambda_h) &:= \sum_{F \in \Gamma_{1,h}} (\lambda_F, v_{1,F} - v_{2,F})_F \\ \forall (\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h}) &\in \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0}, \quad \forall \lambda_h \in Q_h^k. \end{aligned} \quad (20)$$

Entonces el esquema discreto mixto HHO asociado a (5) se lee: Encontrar  $((\underline{\mathbf{u}}_{1,h}, \underline{\mathbf{u}}_{2,h}), \xi_h) \in \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} \times Q_h^k$  tal que

$$\begin{aligned} a_h((\underline{\mathbf{u}}_{1,h}, \underline{\mathbf{u}}_{2,h}), (\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h})) &+ b_h((\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h}), \xi_h) \\ &= F_h((\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h})) \quad \forall (\underline{\mathbf{v}}_{1,h}, \underline{\mathbf{v}}_{2,h}) \in \underline{U}_{\mathcal{T}_h}^{k,0}, \end{aligned} \quad (21a)$$

$$b_h((\underline{\mathbf{u}}_{1,h}, \underline{\mathbf{u}}_{2,h}), \lambda_h) = G_h(\lambda_h) \quad \forall \lambda_h \in Q_h^k, \quad (21b)$$

donde las funcionales lineales discretas  $F_h$  y  $G_h$  se definen como:

$$F_h(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}) := \sum_{T \in \mathcal{T}_{1,h}} (f_1, v_{1,T})_T + \sum_{S \in \mathcal{T}_{2,h}} (f_2, v_{2,S})_S \\ + \sum_{F \in \Gamma_{1,h}} (g_1, v_{1,F})_F + \sum_{F \in \Gamma_{2,h}} (g_2, v_{2,F})_F, \quad (22)$$

$$G_h(\lambda_h) := (\lambda_h, g)_{\Gamma_{1,h}} := \sum_{F \in \Gamma_{1,h}} (\lambda_F, g)_F. \quad (23)$$

**Observación 4.1.** El operador lineal  $\mathbf{B}_h : \underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{T}_h}^{k,0} \rightarrow Q_h^k$ , inducido por  $b_h$ , es caracterizado por

$$\mathbf{B}_h(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}) := (v_{1,F} - v_{2,F})_{F \in \Gamma_{1,h}} \quad \forall (\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}) \in \underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{T}_h}^{k,0}. \quad (24)$$

**Observación 4.2.** La forma bilineal  $a_h$  induce otra seminorma sobre  $\underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{T}_{1,h}}^k \times \underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{T}_{2,h}}^k$ , que es dada por

$$\|(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})\|_{a,h}^2 := a_h((\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}), (\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})) \\ \forall (\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}) \in \underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{T}_{1,h}}^k \times \underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{T}_{2,h}}^k. \quad (25)$$

Introduciendo  $\mathbf{V}_h := \text{Ker}(\mathbf{B}_h)$ , establecemos el siguiente resultado.

**Lema 4.1** (Elipticidad).  $a_h$  es  $\mathbf{V}_h$ -elíptica.

*Demostración.* Ver Lema 4.4 de [8].  $\square$

**Proposición 4.1** (Bien puesto). El problema discreto (21) está bien puesto.

*Demostración.* Se sigue de la elipticidad de  $a_h$  y la suryectividad de  $B_h$ , lo cual verifica las hipótesis de la teoría de Babuška-Brezzi. El análisis es similar a la prueba de la Proposición 4.2 en [8].  $\square$

El siguiente resultado será útil para establecer el análisis a priori.

**Corolario 4.1.** Existe  $\eta > 1$ , independiente del tamaño de malla  $h$ , tal que

$$\eta^{-1} \|(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})\|_h \leq \|(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})\|_{a,h} \quad \forall (\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}) \in \mathbf{V}_h, \quad (26)$$

$$\|(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})\|_{a,h} \leq \eta \|(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})\|_h \quad \forall (\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}) \in \underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{T}_h}^{k,0}. \quad (27)$$

## 5. Análisis de Error

En esta sección, asumimos que la solución exacta  $u_i \in H^{1+\delta_i}(\Omega_i)$ , para algún  $\delta_i \in (1/2, 1]$  y  $\Delta u_i \in L^2(\Omega)$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Estas suposiciones nos permite considerar  $\xi \in L^2(\Gamma_1)$ ,  $g_1 \in L^2(\Gamma_1)$  y  $g_2 \in L^2(\Gamma_2)$ . Además, denotamos la interpolación de la solución exacta por  $\hat{\mathbf{u}}_{i,h} := \mathbf{I}_{\mathcal{T}_{i,h}}^k u_i \in \underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{T}_{i,h}}^k$  para  $i \in \{1, 2\}$ . También consideramos la interpolación de la variable auxiliar  $\xi$  como  $\hat{\xi}_h \in Q_h^k$  tal que  $\hat{\xi}_h|_F := \pi_F^k(\xi)$ , para cada  $F \in \Gamma_{1,h}$ . No es difícil deducir que  $(\hat{\mathbf{u}}_{1,h}, \hat{\mathbf{u}}_{2,h}) \in \underline{\mathbf{U}}_{\mathcal{T}_h}^{k,0}$ . Consideramos

el ensamblaje de las componentes volumétricas de la solución discreta, es decir,  $v_{i,h} \in \mathbb{P}_d^k(\mathcal{T}_{i,h})$  tal que  $v_{i,h}|_T = v_{i,T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_{i,h}$ . A continuación, presentamos estimaciones de error del potencial usando la norma de energía y la norma  $L^2$ , bajo suposiciones de regularidad adicionales.

**Lema 5.1** (Consistencia). Sea  $(u_1, u_2) \in \mathbf{U}$  la solución potencial de (5) y  $(\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h}) \in \underline{\mathbf{U}}_h^{k,0}$  la solución potencial discreta de (21). Entonces, existe una constante  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\|(\hat{\mathbf{u}}_{1,h}, \hat{\mathbf{u}}_{2,h}) - (\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h})\|_{a,h} \\ \leq C \sup_{\substack{(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}) \in \underline{\mathbf{U}}_h^{k,0} \\ \|(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})\|_{a,h} = 1}} \mathcal{E}_h((\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})), \quad (28)$$

donde  $\mathcal{E}_h(\cdot)$  representa el error de consistencia, y viene dado por

$$\mathcal{E}_h((\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})) := a_h((\hat{\mathbf{u}}_{1,h}, \hat{\mathbf{u}}_{2,h}), (\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})) \\ + (\mathbf{B}_h(\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h}), \hat{\xi}_h)_{\Gamma_1} - F_h((\mathbf{v}_{1,h}, \mathbf{v}_{2,h})) \quad (29)$$

*Demostración.* Se sigue directamente de las formulaciones variacionales continua (5) y discreta (21) y de (24).  $\square$

**Teorema 5.1** (Estimación del error en la norma de energía). Bajo las suposiciones del Lema 5.1, y asumiendo la regularidad adicional  $(u_1, u_2) \in H^{k+1+\delta_1}(\Omega_1) \times H^{k+1+\delta_2}(\Omega_2)$ ,  $\exists C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\|(\hat{\mathbf{u}}_{1,h}, \hat{\mathbf{u}}_{2,h}) - (\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h})\|_{a,h} + \|\hat{\xi}_h - \xi_h\|_{\Gamma_{1,h}} \\ \leq Ch^k \left( h_1^{2\delta_1} \|u_1\|_{k+1+\delta_1, \Omega_1}^2 + h_2^{2\delta_2} \|u_2\|_{k+1+\delta_2, \Omega_2}^2 \right)^{1/2}, \quad (30)$$

donde  $h := \max\{h_1, h_2\}$  y  $h_i = \max_{T \in \mathcal{T}_{i,h}} h_T$ ,  $i = 1, 2$ . Además, aplicando propiedades de aproximación al operador  $p_T^{k+1} \mathbf{I}_T^k$  para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , se cumple también

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_{i,h}} \|\nabla u_i - \nabla p_T^{k+1} \mathbf{u}_{i,T}\|_{0,T}^2 \\ \leq Ch^k \left( h_1^{2\delta_1} \|u_1\|_{k+1+\delta_1, \Omega_1}^2 + h_2^{2\delta_2} \|u_2\|_{k+1+\delta_2, \Omega_2}^2 \right)^{1/2}. \quad (31)$$

*Demostración.* Se sigue del Lema 5.1, al acotar el error de consistencia de manera similar a las técnicas usadas en [6]. Por ejemplo, aplicando integración por parte a  $f_i = -\Delta u_i$ , las condiciones de transmisión y de frontera y las propiedades de aproximación del operador  $p_T^{k+1} \mathbf{I}_T^k$ .  $\square$

Para la estimación del error potencial en norma  $L^2$ , consideramos el siguiente problema auxiliar: Encontrar  $z \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  tal que

$$-\Delta z = w \text{ in } \Omega := \Omega_1 \cup \Gamma_1 \cup \Omega_2, \\ \frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}_2} = 0 \text{ on } \Gamma_2 := \partial\Omega, \quad (32)$$

con  $w \in L_0^2(\Omega)$  tal que  $w_i := w|_{\Omega_i}$  y  $z_i := z|_{\Omega_i}$  para  $i = 1, 2$ . Luego, asumimos regularidad adicional sobre  $z$ , la solución débil de (32), de modo que  $z \in H^2(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$

y existe  $C > 0$ , independiente del tamaño de malla, tal que

$$\|z\|_{2,\Omega}^2 \leq C \|w\|_{0,\Omega}^2,$$

o equivalentemente

$$\|z_1\|_{2,\Omega_1}^2 + \|z_2\|_{2,\Omega_2}^2 \leq C (\|w_1\|_{0,\Omega_1}^2 + \|w_2\|_{0,\Omega_2}^2). \quad (33)$$

Observamos que esta suposición se cumple cuando, por ejemplo, el dominio  $\Omega$  es convexo. Este problema auxiliar nos permite establecer la estimación del error de la solución interpolada y la solución discreta volumétrica, con respecto a la norma  $L^2$ .

**Teorema 5.2** (Estimación del error en la norma  $L^2$ ). *Bajo las suposiciones del Teorema 5.1 y la condición de regularidad (33) del problema auxiliar. Existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que para  $k \geq 1$ , se cumple*

$$\|\pi_{\mathcal{T}_{1,h}}^k u_1 - u_{1,h}\|_{0,\Omega_1} + \|\pi_{\mathcal{T}_{2,h}}^k u_2 - u_{2,h}\|_{0,\Omega_2} \quad (34)$$

$$\leq Ch^{k+1} \left( \sum_{i=1}^2 h_i^{2\delta_i} \|u_i\|_{k+1+\delta_i,\Omega_i}^2 \right)^{1/2}. \quad (35)$$

Para  $k = 0$ , asumimos que  $f_i \in H^1(\mathcal{T}_{h,i})$  y  $g_i \in \mathbb{P}_{d-1}^0(\Gamma_{i,h})$  para  $i = 1, 2$ . Entonces

$$\|\pi_{\mathcal{T}_{1,h}}^0 u_1 - u_{1,h}\|_{0,\Omega_1} + \|\pi_{\mathcal{T}_{2,h}}^0 u_2 - u_{2,h}\|_{0,\Omega_2} \leq C \left[ h \left( \sum_{i=1}^2 h_i^{2\delta_i} \|u_i\|_{1+\delta_i,\Omega_i}^2 \right)^{1/2} + h^2 \left( \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{1,\mathcal{T}_{h,i}}^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (36)$$

*Demostración.* Se procede de manera similar al Teorema 5.2 de [8].  $\square$

**Observación 5.1.** Es posible encontrar el mismo orden de convergencia del Teorema (5.2) para la solución discreta reconstruida a través del operador potencial reconstructivo y su solución exacta, con respecto a la norma  $L^2$ .

## 6. Resultados numéricos

En esta sección presentamos tres ejemplos numéricos para evaluar las propiedades de nuestro método. Utilizamos diferentes mallas para las pruebas numéricas.

Nuestro código es una extensión del desarrollado para [5, 6]. Además, calculamos el orden experimental de convergencia ( $r$ ) como

$$r = \log(e_{\mathcal{T}_1}/e_{\mathcal{T}_2}) / \log(h_{\mathcal{T}_1}/h_{\mathcal{T}_2}),$$

donde  $e_{\mathcal{T}_1}$  y  $e_{\mathcal{T}_2}$  son los errores asociados a las variables correspondientes considerando dos tamaño de malla consecutivos  $h_{\mathcal{T}_1}$  y  $h_{\mathcal{T}_2}$ , respectivamente.

### 6.1. Ejemplo 1: Solución exacta regular

Resolvemos el problema de transmisión (1) con subdominios  $\Omega_1 := (1, 2)^2$  y  $\Omega_2 := (0, 3)^2 \setminus \Omega_1$ , usando la malla inicial de la Figura 2, tal que la solución exacta viene dada por

$$u_1(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) - 4/\pi^2,$$

$$u_2(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y),$$

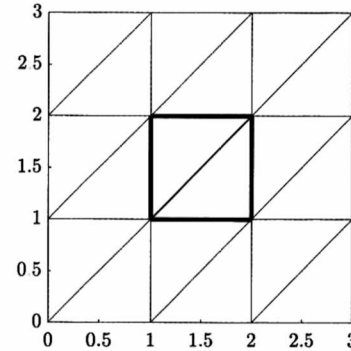


Figura 2. Malla inicial para el Ejemplo 1.

Notamos que en este caso,  $g_1$  y  $g_2$  no son homogéneas en  $\Gamma_1$ . La Figura 3 muestra los órdenes de convergencia del error al aproximar la solución potencial con polinomios a trozos de grado máximo  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Se observa que la tasa de convergencia para este error es de  $k + 2$ , mejor que la indicada en el Teorema 5.2. En la Figura 4 se aprecian los órdenes de convergencia del error de la aproximación del flujo cuya tasa es de  $k + 1$ , en concordancia con el Teorema 5.1. Con respecto a la variable auxiliar de transmisión  $\xi$ , en la Figura 5 se observan los correspondientes órdenes de convergencia de la proyección de  $\xi - \xi_h$  con respecto a una norma  $L^2$  ponderada. Éstos están cercanos a  $k + 3/2$  (que es  $1/2$  más rápida que la predicha por el Teorema 5.1).

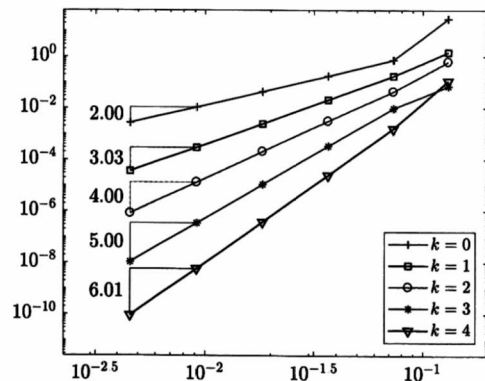
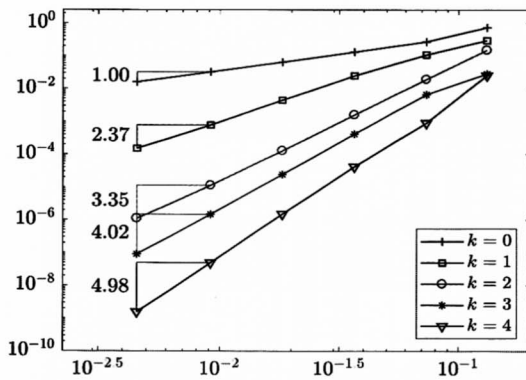
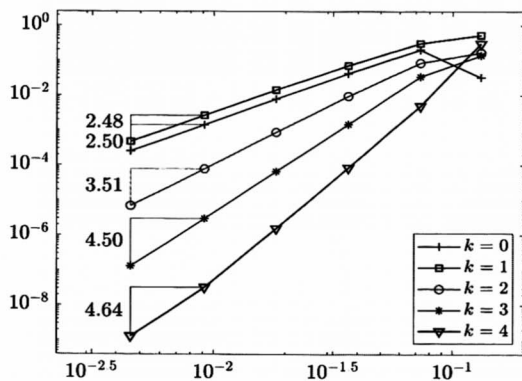


Figura 3. Error del potencial con respecto a la norma  $L^2$  vs.  $h$ .

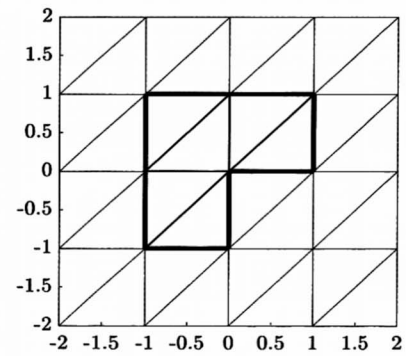




**Figura 4.** Error del flujo con respecto a la norma  $L^2$  vs.  $h$ .

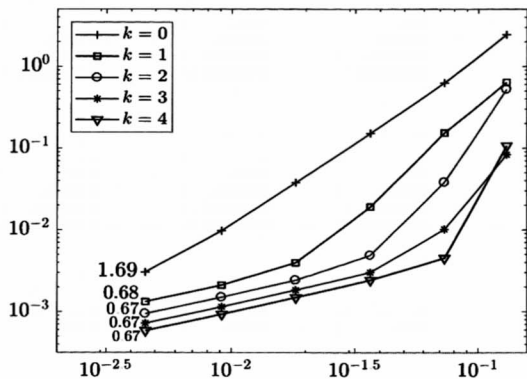


**Figura 5.**  $\|\hat{\xi}_h - \xi_h\|_{0, \Gamma_1}$  vs.  $h$ .



**Figura 6.** Malla inicial para el Ejemplo 1.

En las Figuras 7 y 8 se exhibe el comportamiento del error del potencial y del flujo con respecto al tamaño de malla  $h$ . Estos resultados no contradicen los Teoremas 5.1 y 5.2, ya que en este caso la función  $u_1$  no es regular. Similar comportamiento se observa en la Figura 9 para el error de  $\hat{\xi}_h - \xi_h$  con respecto a la norma  $L^2$  ponderada, con tasa de convergencia de  $2/3$ .



**Figura 7.** Error del potencial con respecto a la norma  $L^2$  vs.  $h$ .

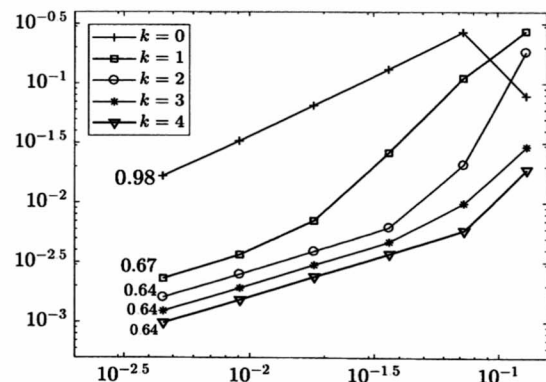
## 6.2. Ejemplo 2: Solución exacta no suave

Ahora, resolvemos un problema de transmisión, considerando  $\Omega_1 = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$  y  $\Omega_2 := (-2, 2)^2 \setminus \bar{\Omega}_1$  (vea Figura 6), mientras que los datos son tales que la solución exacta es  $(u_1, u_2)$ , donde

$$u_1(r, \theta) = r^{2/3} \sin(2\theta/3) - c_1 \quad (\text{en coordenadas polares}),$$

$$u_2(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) - c_2,$$

con  $c_1$  y  $c_2$  constantes reales tal que  $u_j \in L_0^2(\Omega_j)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Señalamos que  $u_1 \in H^{1+\frac{2}{3}-s}(\Omega_1)$ , para un pequeño número arbitrario  $s > 0$ , y  $u_2$  es una función suave.



**Figura 8.** Error del flujo con respecto a la norma  $L^2$  vs.  $h$ .

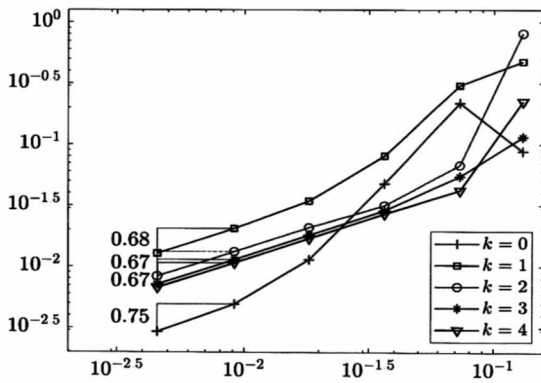


Figura 9.  $\|\hat{\xi}_h - \xi_h\|_{0,\Gamma_1}$  vs.  $h$ .

## 7. Conclusiones

En este artículo hemos propuesto una nueva formulación mixta HHO para aproximar la solución de un problema elíptico de transmisión interior, con condiciones de frontera de transmisión no homogéneas. En primer lugar, derivamos la formulación variacional, a nivel continuo, introduciendo la traza normal en la frontera de transmisión, de la solución que vive en el subdominio anular, como incógnita auxiliar. En la práctica, esta incógnita actúa como un multiplicador de Lagrange. Luego, proponemos un esquema variacional discreto, aplicando el enfoque HHO. Aunque hemos considerado, por simplicidad, una familia de mallas simpliciales uniformes para el análisis actual, es posible extenderla para tratar mallas politopales más generales.

Hemos probado que nuestro esquema mixto discreto HHO está bien puesto y presentado resultados de convergencia en la norma de energía (cf. (25)), así como en la norma usual  $L^2$ . Nuestras estimaciones de error a priori establecen que cuando aproximamos la solución con polinomios a trozos de grado máximo  $k \geq 0$ , al flujo con respecto a la norma  $L^2$  y a la interpolación del potencial con respecto a la norma de energía, observamos que el error tiende a cero con un orden de convergencia  $k + \delta$  (cf. Teorema 5.1). Mientras que el orden de error de la aproximación de la proyección ortogonal  $L^2$  del potencial se comportan como  $\mathcal{O}(k + 1 + \delta)$ , para algún  $\delta \in (1/2, 1]$  (cf. Teorema 5.2). El error de la aproximación de la proyección ortogonal  $L^2$  del multiplicador de Lagrange se mide con respecto a una norma  $L^2$  ponderada adecuada (cf. (11)), y converge, al menos, con el orden  $k + \delta$  (cf. Teorema 5.1).

En el primer ejemplo, presentamos una solución exacta con suficiente regularidad, la cual muestra que se alcanzan las tasas óptimas de convergencia (véase

Figuras 3, 4 y 5). Por otra parte, dado que la solución exacta del segundo ejemplo no es regular, no se espera obtener tasas óptimas de convergencia. Esto lo observamos en las Figuras 7, 8 y 9. Como consecuencia, esto nos motiva a desarrollar un análisis de error a posteriori, para mejorar la calidad de la aproximación y recuperar la tasa óptima de convergencia, si es posible. Esto sería tema de un trabajo futuro.

Finalmente, señalamos que el análisis descrito en este trabajo, puede ser aplicado y/o extendido para tratar problemas de transmisión lineal con difusión variable, y/o con otro tipo de condiciones de contorno en la frontera externa  $\Gamma_2$ . Además, teniendo en cuenta [10], estamos motivados para extender este enfoque para tratar con cierta clase de problemas de transmisión no lineal.

## APÉNDICE A

En el siguiente lema, se muestra las propiedades de aproximación del operador  $p_T^{k+1} \mathbb{I}_T^k$  para funciones con regularidad en  $H^{q+1+\delta}(T)$ , para  $q \in \{0, 1, \dots, k\}$  y  $\delta \in (1/2, 1]$ .

**Lema 7.1** (Propiedades de aproximación para  $p_T^{k+1} \mathbb{I}_T^k$ ). Sean  $k \geq 0$  el grado polinomial,  $q \in \{0, \dots, k\}$  un entero y  $\delta \in (1/2, 1]$  dados. Existe un número real  $C > 0$ , que depende de la regularidad de la malla, depending on the mesh regularity parameter, posiblemente de  $d$ ,  $k$ ,  $q$  y  $\delta$ , pero independiente de  $h_T$ , tal que, para todo  $h \in \mathcal{H}$ , para todo  $T \in \mathcal{T}_h$ , y para todo  $v \in H^{q+1+\delta}(T)$ , se cumple:

$$\begin{aligned} & \|v - p_T^{k+1} \mathbb{I}_T^k v\|_{0,T} + h_T^{1/2} \|v - p_T^{k+1} \mathbb{I}_T^k v\|_{0,\partial T} \\ & + h_T \|\nabla(v - p_T^{k+1} \mathbb{I}_T^k v)\|_{0,T} + h_T^{3/2} \|\nabla(v - p_T^{k+1} \mathbb{I}_T^k v)\|_{0,\partial T} \\ & \leq C h_T^{q+1+\delta} \|v\|_{q+1+\delta,T}. \end{aligned} \quad (37)$$

*Demostración.* Ver Lema 3.3 de [8].  $\square$

## Agradecimientos

R. Bustinza ha sido parcialmente apoyado por CONICYT-Chile a través del Proyecto AFB170001 del Programa PIA: Concurso Apoyo a Centros Científicos y Tecnológicos de Excelencia con Financiamiento Basal, por el proyecto VRID-Enlace No. 218.013.044-1.0, Universidad de Concepción, y por el Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI<sup>2</sup>MA), Universidad de Concepción (Chile). J. Munguia desea expresar su gratitud por el apoyo económico a CONCYTEC-Perú a través del Proyecto FONDECYT "Programas de Doctorado en Universidades Peruanas" CG-176-2015, al Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA) y a la Universidad Nacional de Ingeniería (Lima-Perú).

1. C. J. Luke and P. A. Martin., SIAM J. Appl. Math., 55(4): 904–922, 1995.
2. G. C. Hsiao and N. Nigam., Adv. Differential Equations, 8(11):1281–1318, 2003.
3. B. Heise., Impact Comput. Sci. Engrg., 5 (1993): 75–110, 1993.
4. M. Oevermann and R. Klein., J. Comput. Phys., 219(2):749–769, 2006.
5. R. Bustinza and J. Munguia. REVCIUNI 21(1): 6–14, 2018.
6. R. Bustinza and J. Munguia-La-Cotera. Numer. Methods Partial Differ. Equ., 36(3): 524–551, 2019.
7. D. A. Di Pietro and J. Droniou. Volumen 19 of Modeling, Simulation and Applications series. Springer International Publishing, 2020. 528 pages.
8. R. Bustinza and J. Munguia., Centro de Investigación en Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile, Pre-print 2020-10, 2020.
9. E. Burman and A. Ern., SIAM J. Numer. Anal., 56(3): 1525–1546, 2017.
10. R. Bustinza and J. Munguia. *An a priori error analysis for a class of nonlinear elliptic problems with the hybrid high-order method*. Centro de Investigación en Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile, Pre-print 2020-08, 2020.