

Solución de un sistema no lineal algebraico por optimización numérica

Leopoldo Paredes Soria, Pedro Canales García

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú,
lparedess@uni.edu.pe, pcanales@uni.edu.pe

Recibido el 02 de noviembre del 2020; aceptado el 22 de diciembre del 2020

Se analiza la solución aproximada que se obtiene al pasar de una transformación lineal a una cuadrática en el espacio de Banach lo que resulta laborioso porque se trabaja con un sistema de ecuaciones de recurrencia. Luego se procede a debilitar la función con la finalidad de generalizar el teorema de convergencia del método iterativo de Chebyshev. Se procesa a analizar la nueva condición de detener los algoritmos en su ejecución, asimismo planteamos un modo de acelerar el error del teorema que se plantea en el Teorema de Convergencia. Finalmente se dan dos ejemplos de aplicación en el cual se analizará todo lo expuesto anteriormente.

Palabras Claves: Sistema no lineal, optimización, Transformación cuadrática, espacio de Banach.

We analyze the approximate solution that is obtained when passing from a linear transformation to a quadratic one in the Banach space which is laborious because we work with a system of recurrence equations. Then we proceed to weaken the function in order to generalize the theorem of convergence of Chebyshev's iterative method. It is processed to analyze the new condition to stop the algorithms in their execution, We also propose a way to accelerate the error of the theorem that arises in the Convergence Theorem. Finally, two application examples are given in which everything exposed will be analyzed. previously.

Keywords: Nonlinear system, optimization, Quadratic transformation, Banach space.

1. Introducción

La importancia del presente trabajo es mostrar como en el caso de las funciones reales cuando se desea obtener una mejor aproximación de su solución del caso lineal se pasa al caso cuadrático, en el espacio de Banach si bien la idea es la misma pero las operaciones crece de una manera exorbitante el cual pone en riesgo su utilidad y a su vez trataremos de debilitar la función para extenderlo si fuera posible, y terminaremos analizando una nueva condición de detener el algoritmo con respecto al error absoluto tradicional que se aplica, asimismo se dara una alternativa para acelerar el error del teorema, para lo cual se darán dos ejemplos de aplicación en la especialidad de la Química y de la Física.

Se está haciendo costumbre resolver sistemas de ecuaciones no lineales en la matemática computacional y en las aplicaciones, donde los modelos ha estudiar representan fenómenos que no pueden expresarse en forma lineal. Es decir, los sistemas correspondientes no todos son de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz y x, b son vectores. Este nuevo tipo de ecuaciones algebraicas puede representarse en forma funcional compacta $f(x) = 0$, donde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ y $0 = (0, \dots, 0)^T$ en \mathbb{R}^n . En forma desarrollada escribimos

Donde, K es un subespacio de V , y $T: K \rightarrow V$; V es un espacio de Banach. Las soluciones de las ecuaciones de la forma (1) son llamados punto fijo del operador T . El método más importante del análisis para la solución teórica de cada ecuación es el teorema de punto fijo de Banach.

De acuerdo a Dennis-Schnabel [1] las siguientes características deben tenerse en cuenta para desarrollar un algoritmo que resuelva un problema no lineal.

- El tamaño es un concepto que depende del procesador. Un problema se considera pequeño si tiene hasta 100 variables, mientras que si tiene entre 100 y 1000 variables se puede considerar mediano. Finalmente problemas grandes serán aquellos de más de 1000 variables. Claramente esta noción cambia a medida que cambia la tecnología.

Para problemas de gran tamaño existen algoritmos especiales que explotan la estructura del problema.

- La disponibilidad de las derivadas, cuando se sabe que las funciones que intervienen en el problema son continuamente diferenciables. Sin embargo las derivadas analíticas no están disponibles o son costosas de calcular. Para eso es necesario desarrollar algoritmos que trabajan en forma eficiente ante la ausencia de derivadas.

- La eficiencia es resolver el problema costoso donde las funciones que intervienen necesitan mucho tiempo de máquina para ser evaluadas y tal vez lugar de memoria para almacenar cálculos intermedios.

También puede suceder que para la resolución del problema se necesite resolver subproblemas sencillos relacionados con él. Por lo tanto se necesitan desarrollar algoritmos que requieran pocas evaluaciones de funciones y sus derivadas, y que muestren rápida velocidad de convergencia.

2. Metodología

Dados las consideraciones de las ecuaciones con operadores de la forma:

$$u = T(u), \quad u \in K \quad (1)$$

- La precisión de los dígitos depende de la naturaleza del problema. En general se requieren más dígitos de los que se necesita para asegurar la convergencia del algoritmo, pero el punto es que la precisión requerida rara vez está cerca de la precisión de la máquina.

- La observación de un pobre escalamiento significa que los tamaños de las variables difieren considerablemente entre sí. Si se ignora este fenómeno el comportamiento de un algoritmo para problemas no lineales se puede ver realmente afectado. Entonces, tamaño del problema, eficiencia, precisión en la solución y escalamiento del problema son características que deben ser tenidas en cuenta en el desarrollo de un algoritmo que resuelve un problema no lineal, en particular los tres problemas mencionados al principio.

2.1. Métodos Cuasi-Newton para Sistemas No Lineales

Una de las desventajas del método para sistemas no lineales es el cálculo de la matriz Jacobiana, lo que requiere una cantidad considerable de evaluaciones de funciones. En lo que sigue veremos dos estrategias, para evitar el cálculo de las derivadas.

2.2. Método de Newton con Diferencias Finitas

En el caso de una variable $f'(x)$ es aproximada por a , donde

$$a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (2)$$

y h es una cantidad tal que $|f'(x) - a| \approx O(h)$.

Para el caso n -dimensional es razonable aproximar la componente $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ por

$$a_{ij} = \frac{f_i(x + he_j) - f_i(x)}{h}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

donde e_j es el j -ésimo vector canónico. Esto es equivalente a aproximar la j -ésima columna de $J(x)$ por el vector

$$A_{:,j} = \frac{F(x + he_j) - F(x)}{h}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Se puede probar fácilmente

$$\begin{aligned} \|A_{:,j} - J(x)_{:,j}\|_1 &\leq C_1|h| \\ \|A - J(x)\|_1 &\leq C_1|h|. \end{aligned} \quad (5)$$

Esto nos permite construir el algoritmo del método de Newton con diferencia finita.

2.3. Método Secante para Sistemas No Lineales

Recordemos que el método de Newton aplicado a $F(x) = 0$, en cada iteración resuelve un sistema lineal

$$F'(x_c)s_c = -F(x_c), \quad (6)$$

si la solución de este sistema es x_c , el nuevo iterado es

$$x_+ = x_c + s_c. \quad (7)$$

La iteración de Newton proviene de aproximar $F(x)$ por el modelo lineal alrededor del iterado actual x_c , esto es

$$M_c(x) = F(x_c) + F'(x_c)(x_+ - x_c). \quad (8)$$

Una desventaja del método de Newton es el cálculo de $F'(x_c)$. Por otra parte, si la matriz Jacobiana es aproximada utilizando diferencias finitas, nos encontramos con el inconveniente de tener que efectuar n^2 evaluaciones de funciones.

Entonces, ¿es posible aproximar $F'(x_c)$ o su inversa, cuando éstas no están disponibles, sin efectuar evaluaciones de funciones?

Recordemos que en el método de la secante para el caso unidimensional, considerábamos los dos últimos iterados x_c , x_+ y el modelo a fin que aproxima f en un entorno de x_+ ,

$$m_+(x) = f(x_+) + a_+(x - x_+), \quad (9)$$

donde

$$a_+ = \frac{f(x_+) - f(x_c)}{x_+ - x_c}. \quad (10)$$

Observamos:

$$m_+(x_+) = f(x_+), \quad (11)$$

$$m_+(x_c) = f(x_c), \quad (12)$$

$$m_+(x_{++}) = 0. \quad (13)$$

El precio que se paga por esta aproximación es que se pierde la rápida convergencia cuadrática, obteniéndose sólo convergencia de orden $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$.

Para el caso $n > 1$, se procede en forma similar. Consideremos $x_c, x_+ \in \mathbb{R}^n$. El modelo lineal

$$M_+(x) = F(x_+) + A_+(x - x_+), \quad (14)$$

satisface $M_+(x_+) = F(x_+)$ y exigimos que A_+ sea tal

$$M_+(x_c) = F(x_c), \quad (15)$$

entonces de (14) y (15):

$$\begin{aligned} M_+(x_c) &= F(x_+) + A_+(x_c - x_+) \\ F(x_c) &= F(x_+) + A_+(x_c - x_+) \end{aligned} \quad (16)$$

$$A_+(x_+ - x_c) = F(x_+) - F(x_c).$$

Dado que $x_+ - x_c = s_c$ es el paso; definiendo $y_c = F(x_+) - F(x_c)$ se tiene la ecuación de la secante

$$A_+s_c = y_c. \quad (17)$$

Este es un sistema de n ecuaciones y n^2 incógnitas, las entradas de la matriz $A_+ \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Por lo tanto, no se tiene una solución única.

Forma de hallar una matriz A_+

Dado que en la iteración actual no se tiene ninguna información acerca de la matriz Jacobiana o del modelo, hay que conservar la información que se tiene de las iteraciones previas. Por lo tanto el objetivo elegir A_+ tratando de minimizar el cambio en el modelo lineal satisfaciendo la ecuación de la secante.

2.4. Método de Broyden

Si de

$$A_+ = A_c + \frac{(y_c - A_c s_c) s_c^T}{s_c^T s_c}.$$

se elige v como el paso s_c^T , se tiene la actualización de Broyden

$$A_+ = A_c + \frac{(y_c - A_c s_c) v^T}{v^T s_c}. \quad (18)$$

La cual permite definir el método de Broyden que es quizá después del método de Newton el método más popular para resolver sistemas no lineales de ecuaciones algebraicas.

Actualizar la matriz indica que no se está aproximando $F'(x_+)$ ignorando $F'(x_c)$, sino que la aproximación A_c de $F'(x_c)$ está siendo corregida de modo que A_+ sea una aproximación de $F'(x_+)$.

Como $\langle s_c, n \rangle = 0$, si S es el subespacio generado por s_c , esto es $S = \text{gen}\{s_c\}$, y siendo $\langle A_+ - A_c, n \rangle = 0$, entonces $(A_+ - A_c) \in S$. Pero S es unidimensional, por lo tanto $A_+ - A_c$ debe ser una matriz de rango 1. Luego debe existir un par de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_+ - A_c = uv^T$; en efecto si $u = (u_1; u_2; u_3)^T$, $v = (v_1; v_2; v_3)^T$, entonces

$$uv^T = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix},$$

y vemos que $\text{rango}(uv^T) = 1$.

Así:

$$A_+ = A_c + uv^T. \quad (19)$$

Establecemos el método de Broyden.

2.5. El Método Iterativo de Kantorovich

En este estudio nos preocupamos por el problema de la aproximación de una solución única a nivel local x^* de la ecuación

$$F(x) = 0 \quad (20)$$

donde F es un operador dos veces diferenciable Fréchet $F: D \subset U \rightarrow V$, donde D es un subconjunto convexo; U y V son espacio de Banach.

El método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n \geq 0, \quad x_0 \in D \quad (21)$$

Se ha utilizado por muchos autores (ver [2], [3], [4] y [5]) para generar una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ convergente a x^* . En particular, las siguientes condiciones se han utilizado.

Condición A: Sea $F: D \subseteq U \rightarrow V$ es diferenciable Fréchet sobre D , $F'(x_0)^{-1} \in L(V, U)$ para algún $x_0 \in D$, donde $L(V, U)$ es el conjunto de operadores lineales acotados de V en U , y asumiendo

$$\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(y)]\| \leq l\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D \quad (22)$$

$$\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq a \quad (23)$$

y

$$2la \leq 1 \quad (24)$$

Sobre la condición A, se puede obtener el error estimado, la existencia y la unicidad de solución de las regiones, y saber si x_0 es una condición inicial contenido en dicha región, es decir, el método de Newton (21) a partir de x_0 converge a x^* . Pero a veces cuando queremos determinar si la iteración de Newton (21) a partir de x_0 converge, la condición A sería.

Condición B: Sea $F: D \subseteq U \rightarrow V$ es dos veces diferenciable Fréchet sobre D , con $F'(x) \in L(U, V)$, $F''(x) \in L(U, L(U, V))$ ($x \in D$), $F'(x_0)^{-1}$ existe para algún $x_0 \in D$, y asumimos

$$0 < \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \leq a \quad y \quad \|F'(x_0)^{-1}F''(x_0)\| \leq b \quad (25)$$

$$\|F'(x_0)^{-1}[F'(x) - F'(x_0)]\| \leq c\|x - x_0\|, \quad c > 0 \quad (26)$$

$$\|F'(x_0)^{-1}[F''(x) - F''(x_0)]\| \leq d\|x - x_0\|, \quad \forall x \in D \quad (27)$$

y

$$2La \leq 1 \quad (28)$$

donde sea

$$L = \max\{c, b + 2ad\} \quad (29)$$

o, si la función

$$f(t) = t^3 - 2bt^2 - (2d - b^2)t + 2d(b + ad) \quad (30)$$

tiene dos raíces positivos r_1 y r_2 tal que:

$$[b, b + 2ad] \subseteq [r_1, r_2] \quad (31)$$

entonces $L \geq c$ y

$$L \in [b, b + 2ad] \quad (32)$$

2.6. Método Iterativo de Chebyshev

Sean X y Y espacios de Banach y $F: \Omega \subseteq X \rightarrow Y$ un operador no lineal, el cual es diferenciable Fréchet sobre un dominio convexo abierto Ω . Supongamos que $F'(x_0)^{-1} \in L(Y, X)$ existe para algún $x_0 \in \Omega$, donde $L(Y, X)$ es el conjunto de operadores lineales acotados de Y sobre X .

El proceso iterativo más famoso que aproxima a la solución $x^* \in \Omega$ de la ecuación:

$$F(x) = 0, \quad (33)$$

es el método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1}F(x_n), \quad n \geq 0. \quad (34)$$

El resultado básico concerniente a la convergencia del método de Newton de la existencia y unicidad de soluciones, y la estimación del error son dados por el Teorema de Kantorovich (ver [5], [6], [7] y [8]).

Por otra parte, Candela y Marquina [9], [10] construyen un conjunto de sucesiones que satisfacen algunas relaciones recurrentes, con la cual prueba que la sucesión (34)

está bien definida y converge para una solución x^* de (33) si

$$a = k\beta\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad (35)$$

donde

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)^{-1}\| &\leq \beta, \\ \|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| &\leq \eta, \quad y \\ \|F'(x) - F'(y)\| &\leq k\|x - y\|. \end{aligned} \quad (36)$$

Bajo la misma condición (35) como el método de Newton y con el mismo costo operacional, construimos un nuevo método iterativo para resolver (33). Esta iteración está definida por:

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= F'(x_n)^{-1}, \quad T(x_n) = \frac{1}{2}\Gamma_n A \Gamma_n F(x_n), \\ x_{n+1} &= x_n - [I + T(x_n)]\Gamma_n F(x_n), \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Además, observamos que si la segunda derivada Fréchet es reemplazada en el método Chebyshev [1], [11] por el operador bilineal A , la ecuación (37) es también obtenido, y consecuentemente el proceso iterativo es llamado método iterativo de Chebyshev. Es decir, se debe a la aceleración convexa de los métodos aplicada a las ecuaciones cuadráticas, en la cual la segunda derivada Fréchet es reemplazado por el operador bilineal A .

3. Aportes

3.1. Deducción del Método de Segundo Orden

Por el desarrollo de Taylor hasta el segundo orden, se tiene:

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + F'(x_n)h + F''(x_n)\frac{h^2}{2}$$

Se cumple que $F(x_{n+1}) = 0$ y $F''(x_n) = A$, logrando:

$$-F(x_n) - A\frac{h^2}{2} = F'(x_n)h$$

Sabemos que $h = -F'(x_n)^{-1}F(x_n) = -\Gamma_n F(x_n)$ al reemplazar:

$$-F'(x_n)^{-1}F(x_n) - \frac{1}{2}F'(x_n)^{-1}A(-F'(x_n)^{-1}F(x_n))^2 = h$$

$$-\Gamma_n F(x_n) - \frac{1}{2}\Gamma_n A \Gamma_n F(x_n)\Gamma_n F(x_n) = h$$

$$-[I + T(x_n)]\Gamma_n F(x_n) = x_{n+1} - x_n$$

Finalmente

$$x_{n+1} = x_n - [I + T(x_n)]\Gamma_n F(x_n), \quad n \geq 0$$

3.2. Debilitamiento de la función F

Se busca debilitar la función F como una experimentación y poder ver si es posible obtener un nuevo enfoque de los conceptos dados en el capítulo anterior.

En el teorema de convergencia cuando debilitamos a F que es una función convexa con una cuasi-convexa tenemos:

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{F(x), F(y)\}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Puede ocurrir los siguientes casos:

- Como toda función convexa es cuasi-convexa. En este caso diremos que el teorema de convergencia se cumple.
- Existen funciones no convexas y que son cuasi-convexas. En este caso diremos que el teorema de convergencia no se cumple, porque F no tiene derivada Fréchet en los puntos picos.
- Además hay funciones discontinuas que son cuasi-convexas. En este caso diremos que el teorema de convergencia no se cumple, porque F no es continua y no tiene derivada Fréchet en dicho punto.

Por consiguiente la convexidad de la función F está implícito en el Teorema de Convergencia por ser de suma importancia.

3.3. Nueva Forma de Parada del Algoritmo

La construcción de las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ que son acotadas, el cual permite la convergencia del método iterativo de Chebyshev donde analizaremos y recomendaremos su utilización a partir de adelante. Las variantes que usamos se mencionan a continuación.

- Usando b_n como Parada vs Error Absoluto Si bien se puede usar la sucesión $\{b_n\}$ como parada en el algoritmo ya que garantiza

$$\|T(x_n)\| \leq b_n.$$

Notamos que el error absoluto es más efectivo que el error del método.

- Usando b_n como Parada vs Error Si bien se puede usar la sucesión $\{b_n\}$ como parada en el algoritmo ya que garantiza

$$\|T(x_n)\| \leq b_n.$$

- Usando $d_n\eta$ como Parada vs el Error Absoluto Si bien se puede usar $d_n\eta$ como parada en el algoritmo ya que garantiza

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq d_n\eta.$$

- Usando $d_n\eta$ como Parada vs Error Si bien se puede usar $d_n\eta$ como parada en el algoritmo ya que garantiza

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq d_n\eta.$$

En todos los casos analizados se tendrá los mismos valores de las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ que son.

A pesar que para este ejemplo los errores del método fueron tan eficientes se recomienda usarlos porque propios del cálculos de las sucesiones obtenidas y garantizan la convergencia del método.

3.4. Mejoramiento del Error del Teorema de Convergencia

En este proceso agregaremos en el programa lo siguientes pasos:

$$\beta = a_n \beta; \quad \eta = c_n \eta;$$

Con el cual se mejora el error del método, su utilidad se garantiza porque mientras que β_n crece debido que $a_n > 1$, los valores de η_n decrece, es lo que permite mejorar el error de método y lo cual se muestra en los ejemplos de aplicación que damos a continuación.

4. Aplicaciones

Se presentan aplicaciones tomando en cuenta la nueva condición para detener el algoritmo del teorema de convergencia del método iterativo de Chebyshev que se planteó en el capítulo anterior el cual difiere del error absoluto tradicional que se aplica y por ende merece analizar su utilidad.

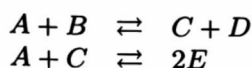
Además se busca mostrar posibles trabajos de investigación multidisciplinarios con investigaciones del área de Química.

La resolución de problemas es de suma importancia para el avance de las matemáticas así como su comprensión y aprendizaje. En el antegrado se resuelven usando los métodos de Jacobi, Gauss Seidel y SOR para sistemas de ecuaciones no lineales.

Asimismo cabe indicar que cuando llegue al equilibrio la concentración a la salida del reactor, las constantes de equilibrio son fijos.

4.1. Reacciones en fase gaseosa

En un reactor se efectúa las siguientes reacciones en fase gaseosa:



A la temperatura de la reacción, las constantes de equilibrio son $K_{p1} = 2,6$ y $K_{p2} = 3,1$. Las composiciones iniciales son $2 \frac{\text{mol}}{\text{l de A}}$ y $1 \frac{\text{mol}}{\text{l de B}}$. Determine la concentración a la salida del reactor, asumiendo que se alcanza el equilibrio usando sistemas de ecuaciones no lineales, usando los métodos de Newton Kantorovich y Chebyshev.

La ley de acción de masa que establece que para una reacción reversible en equilibrio y a una temperatura constante, una relación determinada de concentraciones de reactivos y productos cuando estos llegan al equilibrio tiene un valor constante que es llamado constante de equilibrio.

Así, para una temperatura constante se cumple que:

$$K_c = \frac{[C]^c [D]^d}{[A]^a [B]^b},$$

donde K es la constante de equilibrio y $[X]$ indica la concentración de la especie X en el equilibrio.

Para un equilibrio homogéneo gaseoso, se tomará en

cuenta las presiones parciales de las especies reactivas. Así, para nuestra ecuación tenemos:

$$K_p = \frac{[PC]^c [PD]^d}{[PA]^a [PB]^b},$$

donde $[PX]$ indica la presión parcial de la especie X . La relación entre ambas constantes de equilibrio está dada por:

$$K_p = K_c * (RT)^{(c+d-a-b)};$$

donde R es la constante universal de los gases ideales y T es la temperatura.

Las variables a usar son:

x : Cambio de concentración en la primera reacción.

y : Cambio de concentración en la segunda reacción.

Las cantidades de las concentraciones en las dos reacciones en el equilibrio son:

Concentración	Masas
n_A	$2 - x - y$
n_B	$1 - x$
n_C	$x - y$
n_D	x
n_E	$2y$

El cambio en el número de moles del gas en las dos ecuaciones químicas balanceadas es igual a 0, entonces se da que $K_p = K_c$.

Por la ley de acción de masas se tiene:

$$2,6 = K_{p1} = K_{c1} = \frac{[C][D]}{[A][B]} = \frac{(x-y)x}{(2-x-y)(1-x)}$$

$$3,1 = K_{p2} = K_{c2} = \frac{[E]^2}{[A][C]} = \frac{(2y)^2}{(2-x-y)(x-y)}$$

Planteando el siguiente sistema de ecuaciones no lineales de $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con:

$$f_1(x, y) = 1,6x^2 + 3,6xy - 7,8x - 2,6y + 5,2 = 0,$$

$$f_2(x, y) = 3,1x^2 + 0,9y^2 - 6,2x + 6,2y = 0.$$

Entonces

$$F(x, y) = (1,6x^2 + 3,6xy - 7,8x - 2,6y + 5,2, 3,1x^2 + 0,9y^2 - 6,2x + 6,2y)$$

4.1.1. Convergencia usando el Método de Newton-Kantorovich.

De la condición B , tenemos.

Sea el $D = \langle -0,34; 1,94 \rangle \times \langle -0,74; 1,54 \rangle$ con $\bar{x}_0 = (0,8; 0,4) \in \Omega \subseteq D$.

El Jacobiano es:

$$F'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 3,2x + 3,6y - 7,8 & 3,6x - 2,6 \\ 6,2x - 6,2 & 1,8y + 6,2 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz Jacobiana es:

$$F'(\bar{x})^{-1} = P \begin{bmatrix} 0,9y + 3,1 & 1,3 - 1,8x \\ 3,1(1-x) & 1,6x + 1,8y - 3,9 \end{bmatrix}$$

con

$$P = [2(0,9y + 3,1)(1,6x + 1,8y - 3,9) - 6,2(x - 1)(1,8x - 1,3)]^{-1}.$$

El valor de $\|F'(\bar{x}_0)^{-1}\|_\infty = 0,277469478357381 = \beta$
Los valores son:

$$\begin{aligned} & \|F'(\bar{x}_0)^{-1}F(\bar{x}_0)\|_\infty \\ &= \left\| \begin{bmatrix} -0,029399432729066 \\ -0,056135158465902 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0,056135158465902 \\ &\Rightarrow a = 0,056135158465902. \end{aligned}$$

$$F''(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} 3,2 & 3,6 \\ 3,6 & 0 \\ 6,2 & 0 \\ 0 & 1,8 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\|F'(\bar{x}_0)^{-1}F''(\bar{x}_0)\|_\infty = 1,774571463805648 = b.$$

Donde:

$$\begin{aligned} & \|F'(\bar{x}_0)^{-1}[F'(\bar{x}) - F'(\bar{x}_0)]\|_\infty = \\ & \left\| F'(\bar{x}_0)^{-1} \begin{bmatrix} 3,2(x - 0,8) + 3,6(y - 0,4) & 3,6(x - 0,8) \\ 6,2(x - 0,8) & 1,8(y - 0,4) \end{bmatrix} \right\|_\infty \\ & \leq \left\| F'(\bar{x}_0)^{-1} \begin{bmatrix} 3,2 & 3,6 \\ 3,6 & 0 \\ 6,2 & 0 \\ 0 & 1,8 \end{bmatrix} \right\|_\infty \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_\infty \\ & \leq 1,77457146380568 \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_\infty \\ & \Rightarrow c = 1,77457146380568. \end{aligned}$$

Dado que $F''(\bar{x})$ es constante, entonces $d = 0$. Además:

$$L = \max\{c, b + 2ad\} = \max\{c, b\} = 1,774571463805648,$$

con

$$2La = 0,199231700659596 < 1.$$

De

$$\begin{aligned} f(t) &= t^3 - 2bt^2 - (2d - b^2)t + 2d(b + ad) \\ &= t^3 - 2bt^2 + b^2t \\ &= t(t - b)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t = b = 1,774571463805648 = r_1 = r_2.$$

Se cumple:

$$[b, b + 2ad] = [b, b] \subseteq [r_1, r_2] \Rightarrow [b, b] \subseteq [r_1, r_1].$$

Entonces $L \geq c$ y $L \in [b, b + 2ad] \Rightarrow L \in [b, b]$.

Luego, tenemos:

$$p(t) = 0,887285731902824t^2 - t + 0,056135158465902.$$

Luego, la sucesión nos da una raíz, con $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} & t_{n+1} = t_n \\ & - \frac{0,887285731902824t_n^2 - t_n + 0,056135158465902}{1,774571463805648t_n - 1} \end{aligned}$$

n	t_n	E	$p(t_n)$
0	0		0,056135158
1	0,056135158	0,056135158	0,002795975
2	0,059240472	0,003105314	0,000008556
3	0,059250033	9,561212107	$8,1113 \times 10^{-11}$
4	0,059250034	$9,0643 \times 10^{-11}$	0,000000000

donde $2La = 0,199231700659596 < 1$.

Entonces

$$p(0,05925003464793) = 0 \Rightarrow r_1 = 0,059250034064793.$$

Análogamente

n	t_n	E	$p(t_n)$
0	1		-0,056579109
1	1,073045693	0,073045693	0,004734267
2	1,06780980	0,005235885	0,000024324
3	1,067782628	0,000027181	$6,55537 \times 10^{-10}$
4	1,067782627	$7,32560 \times 10^{-10}$	0,000000000

$$\Rightarrow r_2 = 1,06778262750574$$

Entonces, el método de Newton-Kantorovich está bien definido, la solución $\bar{x}^* \subset \Omega$ y es única en el conjunto $\{\bar{x} / \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r_1\} \cap \Omega$, donde $r_1 = 0,059250034064793$.

La tabla del método de Newton-Kantorovich es:

k	x_k	y_k	Error
0	0,8	0,4	
1	0,829399432729	0,4561351584659	0,056135158465
2	0,831437055478	0,4556565669837	0,002037622749
3	0,831437753043	0,4556548080497	0,000001758934
4	0,831437753042	0,4556548080488	0,000000000001

4.2. Convergencia del Método Iterativo de Chebyshev.

De las condiciones del teorema.

Sea el $\Omega = D = \langle -0,34; 1,94 \rangle \times \langle -0,74; 1,54 \rangle$ con $\bar{x}_0 = (0,8; 0,4) \in \Omega$.

El Jacobiano es:

$$F'(x, y) = JF(x, y) = \begin{bmatrix} 3,2x + 3,6y - 7,8 & 3,6x - 2,6 \\ 6,2x - 6,2 & 1,8y + 6,2 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz Jacobiana es:

$$JF(\bar{x})^{-1} = P \begin{bmatrix} 0,9y + 3,1 & 1,3 - 1,8x \\ 3,1(1 - x) & 1,6x + 1,8y - 3,9 \end{bmatrix}$$

con

$$P = (2(0,9y + 3,1)(1,6x + 1,8y - 3,9) - 6,2(x - 1)(1,8x - 1,3))^{-1}.$$

El valor de $\|J(\bar{x}_0)^{-1}\|_\infty = 0,277469478357381 = \beta$
Los valores son:

$$\begin{aligned} & \|JF(\bar{x}_0)^{-1}F(\bar{x}_0)\|_\infty \\ &= \left\| \begin{bmatrix} -0,029399432729066 \\ -0,056135158465902 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0,056135158465902 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \eta = 0,056135158465902.$$

Luego:

$$\begin{aligned} F'(x, y) - F'(u, v) &= \begin{bmatrix} 3,2x + 3,6y - 7,8 & 3,6x - 2,6 \\ 6,2x - 6,2 & 1,8y + 6,2 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 3,2u + 3,6v - 7,8 & 3,6u - 2,6 \\ 6,2u - 6,2 & 1,8v + 6,2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3,2(x - u) + 3,6(y - v) & 3,6(x - u) \\ 6,2(x - u) & 1,8(y - v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3,2 & 3,6 \\ 3,6 & 0 \\ 6,2 & 0 \\ 0 & 1,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - u \\ y - v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tomando norma m.a.m. tenemos:

$$\|F'(x, y) - F'(u, v)\|_{\infty} \leq \left\| \begin{bmatrix} 3,2 & 3,6 \\ 3,6 & 0 \\ 6,2 & 0 \\ 0 & 1,8 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \|(x, y) - (u, v)\|_{\infty}.$$

$$\Rightarrow k = 6,8$$

Si $a = k\beta\eta = 0,105915393331891 < 0,5$ y $\alpha = 3,4 \in (0, 72,66851449131069)$.

Entonces $\{x_n\}$ está bien definido, $x_n \in B(x_0, r\eta)$, $\forall n \geq 0$ y converge para $x^* \in \bar{B}(x_0, r\eta)$.

De la relación recurrente, se requiere

$$b = \alpha\beta\eta = 0,05295769666594540$$

donde $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{b}{2} = 0,02647884833297270$, $c_0 = 1$ y $d_0 = 1 + \frac{b}{2} = 1,02647884833297270$.

La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	1,000000000	0,0264788483	1,000000000	1,026478848
1	1,121981756	0,0027425555	0,092314631	0,092567809
2	1,134461179	0,0000231540	0,000770794	0,000770812
3	1,134566261	0,0000000016	0,000000054	0,000000053
4	1,134566268	1×10^{-17}	$2,6 \times 10^{-17}$	$2,6 \times 10^{-17}$

el resultado del método iterativo de Chebyshev es:

k	x_k	y_k	Error	Error Teor.
0	0,800000000	0,400000000		
1	0,830638409	0,456039843	0,056039843	0,005196309
2	0,831437731	0,455655015	0,000799322	0,000043270
3	0,831437753	0,455654808	0,000000206	0,000000003
4	0,831437753	0,455654808	$3,16 \times 10^{-16}$	1×10^{-17}

Se observa que cuando en el algoritmo agregamos $\beta = a_n\beta$ y $\eta = c_n\eta$ y realizamos los calculos lo que mejora es el error del teorema, como mostramos a continuación en las tablas siguientes:

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	1,0000	0,0264788	1,000000	1,02647
1	1,1219	0,0027425	0,092314	0,09256
2	1,1344	0,0000231	0,000771	0,00077
3	1,1346	$1,6 \times 10^{-9}$	$5,35476604 \times 10^{-9}$	$5,35476605 \times 10^{-9}$

el resultado del método iterativo de Chebyshev es:

k	x_k	y_k	Error	Error Teorema
0	0,800000000	0,400000000		
1	0,83063840	0,456039842	0,0560398	0,000479695
2	0,83143773	0,455655014	0,0007993	0,000000003
3	0,83143775	0,455654808	0,0000002	0,000000000

4.3. Reflexión difusa en un medio paralelo

La teoría de la transferencia de radiación discutida hasta ahora utiliza la formulación local, ya que se emplean cantidades definidas solo localmente. En 1943 Ambarzumian formuló un principio de invariancia para la ley de reflexión difusa:

- La ley de la reflexión difusa de un medio paralelo plano homogéneo infinitamente profundo es invariante con respecto a la adición (o sustracción) de capas de espesor óptico finito arbitrario hacia (o desde) el medio.

Para la ley del oscurecimiento (es debido a la absorción y difusión de la luz de la estrella [5], el profesor Chandrasekhar modificó el principio de la siguiente manera:

- La distribución emergente de un medio paralelo plano semi-infinito es invariante a la suma (o resta) de capas de espesor óptico arbitrario hacia (o desde) el medio.

Consideremos el espacio $X = C[0, 1]$ de las funciones continuas en $[0, 1]$ y dotado de la norma del máximo $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$, $x \in X$. Se desea encontrar una función $x \in X$ que obedece a la ecuación integral no lineal.

$$x(s) = 1 + \lambda x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t) dt, \quad s \in [0, 1]. \quad (38)$$

La resolución de (38) es equivalente a resolver (20), siendo $F: X \rightarrow X$ y tal que:

$$F(x)(s) = x(s) - 1 - \lambda x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t) dt, \quad s \in [0, 1]. \quad (39)$$

Estudiamos el caso particular $\lambda = \frac{1}{4}$, por conveniencia. Veamos la existencia y unicidad de la solución de esta ecuación.

Para aplicar el teorema de Kantorovich, necesitamos partir de una función inicial adecuada. Dado (38) se deduce que $x(0) = 1$, una elección razonable parece ser $x_0(s) = 1$, $\forall s \in [0, 1]$. Además:

$$\begin{aligned} F'(x)y(s) &= y(s) - \frac{1}{4}x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{4}y(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} x(t) dt, \quad y \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} F''(x)yz(s) &= -\frac{1}{4}z(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt - \\ &\quad - \frac{1}{4}y(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} z(t) dt, \quad z \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (41)$$

Podemos considerar el subconjunto

$$\Omega \subseteq D = \underbrace{\langle -0,5, 2,5 \rangle \times \langle -0,5, 2,5 \rangle \cdots \langle -0,5, 2,5 \rangle}_{s \text{ términos}}$$

porque vemos que es conveniente, que aparece en el enunciado del teorema de Kantorovich como el propio espacio X , que es un conjunto convexo. Procedemos a calcular las constantes a, b, c y d .

En primer lugar,

$$\begin{aligned} F(x_0)(s) &= x_0(s) - 1 - \frac{1}{4}x_0(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} x_0(t) dt \\ &= -\frac{s}{4} \int_0^1 \frac{1}{s+t} dt \\ &= -\frac{s}{4} \ln\left(\frac{s+1}{s}\right) \end{aligned} \quad (42)$$

tomando la norma del máximo m.a.m. tenemos.

$$\|F(x_0)\| = \frac{\ln(2)}{4} = 0,173286795139. \quad (43)$$

Por el lema de Banach sobre inversión de operadores nos permite encontrar una cota para $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$. Como lo mostraremos: Dada una función cualquiera $y \in X$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|[I - F'(x_0)]y\| &= \max_{s \in [0,1]} |y(s) - F'(x_0)y(s)| \\ &= \frac{1}{4} \max_{s \in [0,1]} \left| \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt \right. \\ &\quad \left. + y(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t} dt \right| \\ &\leq \frac{\ln(2)}{2} \|y\|, \end{aligned} \quad (44)$$

luego

$$\|I - F'(x_0)\| \leq \frac{\ln(2)}{2} = 0,346573590279 < 1, \quad (45)$$

con lo que se garantiza que existe $\Gamma_0 = F'(x_0)^{-1}$ y además

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0\| &\leq \frac{1}{1 - \|I - F'(x_0)\|} \leq \frac{1}{1 - 0,346573590279} \\ &= 1,530394219032. \end{aligned} \quad (46)$$

En consecuencia,

$$\|\Gamma_0 F(x_0)\| \leq \frac{\frac{\ln(2)}{4}}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} = 0,265197109516 = a, \quad (47)$$

y

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0 F''(x_0)yz\| &\leq \|\Gamma_0\| \|F''(x_0)\| \|y\| \|z\| \\ &\leq \frac{\frac{\ln(2)}{2}}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} \|y\| \|z\| \end{aligned} \quad (48)$$

$$\Rightarrow \|\Gamma_0 F''(x_0)\| \leq 2a = 0,530394219033 = b, \quad (49)$$

luego

$$\begin{aligned} \|\Gamma_0[F'(x) - F'(x_0)]y\| &\leq \|\Gamma_0\| \|F'(x) - F'(x_0)\| \|y\| \\ &\leq \frac{\frac{\ln(2)}{2}}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} \|y\| \end{aligned} \quad (50)$$

$$\|\Gamma_0[F'(x) - F'(x_0)]\| \leq b = 0,530394219033 = c. \quad (51)$$

No olvidemos que la $F''(x)$ es constante, entonces en forma parecida deducimos que

$$\begin{aligned} [F''(x) - F''(x_0)]yz &= -\frac{y}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} z(t) dt \\ &\quad - \frac{z}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt \\ &\quad + \frac{y}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} z(t) dt + \frac{z}{4} \int_0^1 \frac{s}{s+t} y(t) dt = 0yz. \end{aligned} \quad (52)$$

Completando

$$\|\Gamma_0[F''(x) - F''(x_0)]yz\| \leq \|\Gamma_0\| \|F''(x) - F''(x_0)\| \|yz\| \quad (53)$$

$$\Rightarrow \|\Gamma_0[F''(x) - F''(x_0)]\| \leq 0 = d. \quad (54)$$

Luego

$$L = \max\{c, b + 2ad\} = \max\{c, b\} = 0,530394219033, \quad (55)$$

Como $a, L > 0$. Tenemos:

$$p(t) = 0,265197109517251t^2 - t + 0,265197109517251.$$

Luego, la sucesión nos da una raíz, con $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n - \\ &\quad \frac{0,265197109517251t_n^2 - t_n + 0,265197109517251}{0,530394219034502t_n - 1} \end{aligned}$$

n	t_n	E	$p(t_n)$
0	0		0,2651971095
1	0,2651971095	0,26519710952	0,018651182
2	0,2869011621	0,02170405257	0,000124925
3	0,2870485093	0,00014734725	0,000000006
4	0,2870485161	0,00000000679	0,0

donde $2La = 0,281318027584 < 1$.

Entonces

$$p(0,287048516133531) = 0 \Rightarrow r_1 = 0,287048516133531,$$

la otra raíz se puede obtener por:

$$r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2La}}{L} = 3,483731647428. \quad (56)$$

Entonces, la ecuación de Chandrasekhar (38) está bien definido, en el sentido donde la solución $x^* \subset \Omega$ y es única en el conjunto $\{x/\|x - x_0\| \leq r_1\} \cap \Omega$, donde $r_1 = 0,287048516133$.

Ahora vamos encontrar la ecuación de sistemas no lineales de (38), para lo cual utilizaremos la fórmula de Gauss-Legendre que permitirá obtener el operador bilineal A , trabajamos sobre:

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{x(s)}{4} \frac{s}{s+t} x(t) dt, \quad (57)$$

haciendo $b = 1$ y $a = 0$, tenemos:

$$t = \frac{1-0}{2}u + \frac{1+0}{2}, u \in [-1, 1], \quad (58)$$

con

$$g(u) = f\left(\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\right). \quad (59)$$

Reemplazando, se cumple:

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(u)du = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m w_j g(u_j), \quad (60)$$

donde t_j y w_j son los nodos y pesos conocidos. Consideraremos $m = 8$ para obtener el cuadro siguiente:

j	u_j	t_j	w_j
1	-0,960289857	0,0198550715	0,101228536
2	-0,796666478	0,1016667610	0,222381034
3	-0,525532410	0,2372337950	0,313706646
4	-0,183434642	0,4082826790	0,362683783
5	0,183434642	0,5917173210	0,362683783
6	0,525532410	0,7627662050	0,313706646
7	0,796666478	0,8983332390	0,222381034
8	0,960289857	0,9801449285	0,101228536

Denotamos x_i a las aproximaciones $x(t_i)$, $i = 1, \dots, 8$, logrando obtener el sistema de ecuaciones no lineal siguiente:

$$x_i = 1 + \frac{1}{8} x_i \sum_{j=1}^8 w_j \frac{t_i}{t_i + t_j} x_j, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (61)$$

Haciendo $a_{ij} = \frac{w_j t_i}{8(t_i + t_j)}$, tenemos.

$$x_i = 1 + x_i \sum_{j=1}^8 a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (62)$$

El sistema de ecuaciones no lineales es:

$$F(x_i) = 1 + x_i \sum_{j=1}^8 a_{ij} x_j - x_i, \quad i = 1, \dots, 8, \quad (63)$$

donde A es un operador bilineal de orden 64×8 , el cual no es tan fácil de ser representado.

La tabla del método de Newton-Kantorovich es:

k	0	1	2	3	4
x_{1k}	1,0	1,021632	1,021720	1,021720	1,021720
x_{2k}	1,0	1,072393	1,073186	1,073186	1,073186
x_{3k}	1,0	1,123421	1,125724	1,125725	1,125725
x_{4k}	1,0	1,165547	1,169750	1,169753	1,169753
x_{5k}	1,0	1,197036	1,203067	1,203079	1,203072
x_{6k}	1,0	1,218969	1,226484	1,226491	1,226491
x_{7k}	1,0	1,232961	1,241516	1,241525	1,241525
x_{8k}	1,0	1,240309	1,249439	1,249449	1,249449
Error		0,265197	0,021704	0,000147	0,000000007

Veamos la convergencia del método iterativo de Chebyshev.

De las condiciones del teorema.

Sea el $\Omega = D = \langle -0,5; 2,5 \rangle \times \langle -0,5; 2,5 \rangle \cdots \langle -0,5; 2,5 \rangle$, tomando convenientemente $\bar{x}_0 = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1)^T \in \Omega$.

El Jacobiano evaluado en \bar{x}_0 es:

$$\|\Gamma_0\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} = 1,53039421903450235 = \beta, \quad (64)$$

luego

$$\|\Gamma_0 F(\bar{x}_0)\| \leq \frac{\frac{\ln(2)}{4}}{1 - \frac{\ln(2)}{2}} = 0,26519710951725117 = \eta, \quad (65)$$

sabemos que:

$$\|F'(\bar{x}) - F'(\bar{u})\| \leq \frac{\ln(2)}{2} \|\bar{x} - \bar{u}\| \quad (66)$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{2} = 0,34657359027997264. \quad (67)$$

Si $a = k\beta\eta = 0,14065901379260984 < 0,5$ y $\alpha = 0,09096495075 \in \langle 0, 2, 410077214714 \rangle$ obtenido de (63).

Entonces $\{\bar{x}_n\}$ está bien definido, $\bar{x}_n \in B(\bar{x}_0, r\eta)$, $\forall n \geq 0$ y converge para $\bar{x}^* \in \bar{B}(\bar{x}_0, r\eta)$.

De la relación recurrente, se requiere:

$$b = \alpha\beta\eta = 0,03691868226846743$$

donde

$$a_0 = 1, b_0 = \frac{b}{2} = 0,01845934113423372, c_0 = 1$$

y $d_0 = 1 + \frac{b}{2} = 1,01845934113423375$.

La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	1,000000000	0,0184593411	1,000000000	1,01845934
1	1,16720911	0,0022988141	0,10669375	0,10693902
2	1,18806812	0,0000264311	0,00120519	0,00120523
3	1,18830746	0,0000000034	0,00000015	0,00000015
4	1,18830749	5×10^{-18}	0,0	0,0

el resultado del método iterativo de Chebyshev es:

k	0	1	2	3	4
x_{1k}	1,0	1,0224	1,0217	1,0217	1,0217
x_{2k}	1,0	1,0743	1,0732	1,0732	1,0732
x_{3k}	1,0	1,1261	1,1257	1,1257	1,1257
x_{4k}	1,0	1,1700	1,1698	1,1698	1,1698
x_{5k}	1,0	1,1993	1,2031	1,2031	1,2031
x_{6k}	1,0	1,2224	1,2265	1,2265	1,2265
x_{7k}	1,0	1,2362	1,2415	1,2415	1,2415
x_{8k}	1,0	1,2432	1,2494	1,2494	1,2494
$E - T$		0,02836	0,00032	$4,06 \times 10^{-8}$	0,0

Se observa que cuando en el algoritmo agregamos $\beta = a_n\beta$ y $\eta = c_n\eta$ y realizamos los cálculos lo que mejora es el error del teorema, como mostramos a continuación en las tablas siguientes:

k	a_k	b_k	c_k	d_k
0	1,000000	0,018459341	1,0000000	1,018459
1	1,167209	0,002298814	0,1066938	0,106939
2	1,188068	0,000026431	0,0012052	0,001205
3	1,188307	0,000000003	0,0000002	0,000000

el resultado del método iterativo de Chebyshev es:

k	0	1	2	3
x_{1k}	1,0	1,0224	1,0217	1,0217
x_{2k}	1,0	1,0742	1,0731	1,0731
x_{3k}	1,0	1,1261	1,1257	1,1257
x_{4k}	1,0	1,1699	1,1697	1,1697
x_{5k}	1,0	1,1992	1,2030	1,2030
x_{6k}	1,0	1,2224	1,2264	1,2264
x_{7k}	1,0	1,2362	1,2415	1,2415
x_{8k}	1,0	1,2432	1,2494	1,2494
$E - T$		0,003026	$4,1 \times 10^{-18}$	0,0

En este caso notamos que el cambio realizado en el algoritmo si mejora el error del Teorema y el cual es una gran utilidad.

5. Conclusiones

- Se dice que el método de Newton en su versión general se denomina el método de Newton Kantorovich, permite su aplicación a ecuaciones definidas entre espacios de funciones, como son el caso de ecuaciones diferenciales o ecuaciones integrales.
- La transformación cuadrática aplicada nos da un buen augurio su utilidad cuando se desea mejorar la solución aproximada que se desea obtener para un problema dado, ya que el método iterativo de Chebyshev nos garantiza que la solución existe y es único en la región abierta y convexa que se trabaja.
- Se menciona al Teorema de Kantorovich donde existe una contribución de las herramientas del Análisis Funcional a los problemas que se resuelven usando el Análisis Numérico que se aplica en los diversos problemas donde interactúan los sistemas de ecuaciones no lineales y cuya justificación recae en las herramientas del Análisis Funcional, así como las aplicaciones lineales, derivadas de Fréchet, etc.
- El sistema de relaciones recurrentes tiene la ventaja de reducir el problema original a una forma más simple con funciones y sucesiones escalares, y proporciona condiciones suficientes para asegurar la convergencia semilocal del método en espacios de Banach.
- Se intentó debilitar la función F al pasar de convexa a cuasi-convexa, y se concluyó que no es posible, lo cual nos indica que el Teorema de Convergencia del método iterativo de Chebyshev es fuerte.
- En la aplicación se noto que el sistema de relaciones recurrentes tiene la ventaja de que reduce el problema original a una forma más simple con funciones y sucesiones escalares, y proporciona condiciones suficientes para asegurar la convergencia semilocal del método en espacios de Banach.
- Al considerar métodos de orden superior, así como el método iterativo de Chebyshev que es de segundo orden se necesitan dos parámetros para controlar la convergencia semilocal y a partir de las relaciones recurrentes generan cuatro sucesiones reales como el orden de convergencia del método iterativo menos uno. Esto simplifica en gran manera su aplicación práctica para resolver una ecuación no lineal en espacios de Banach.

• Los métodos de orden superior no son considerados su utilidad por muchos autores, debido a su alto costo computacional, además que se tiene que evaluar la derivada segunda de Fréchet, pero nuestros resultados muestran que el costo computacional es compensado por la velocidad de convergencia.

• En el problema que incluye a una ecuación integral, para el caso en particular se logra obtener el sistema de ecuaciones no lineal utilizando la fórmula de Gauss-Legendre, el cual es de suma importancia para lograr obtener la solución por ambos métodos.

• Es importante concluir con respecto a lo anterior, si no se conoce el sistema de ecuaciones no lineal solo se podrá analizar la convergencia o no del problema en estudio, ya que para el Teorema de Kantorovich es suficiente conocer los valores de r_1 y r_2 y en el Teorema de Chebyshev es observar que la sucesión de $\{b_n\}$ converga a 0.

• La nueva condición de parada del algoritmo dado en los métodos resulta ser una alternativa en tenerlo en consideración ya que en algunos problemas es más efectivo que en otros casos, en conclusión, es importante que los algoritmos que presentamos en el espacio de Banach muestran otra alternativa de detener la ejecución del algoritmo en ser considerado y su utilidad dependerá del problema en estudio.

• Al analizar la convergencia del Teorema de Kantorovich en el segundo problema de aplicación observamos que el error absoluto y el error del teorema difieren en su resultando, siendo más eficiente el error absoluto como se muestra en la tabla siguiente:

n	Error	Error Teorema
0		
1	0,24030885011662972	0,26519710951725117
2	0,00913016968850622	0,02170405257287755
3	0,00000949638598025	0,00014734725160875
4	0,00000000000818812	0,00000000679179379

• Al analizar la convergencia del Teorema de Chebyshev en el segundo problema de aplicación observamos que el error absoluto y el error del teorema difieren su resultando, siendo más eficiente el error del teorema como se muestra en la tabla siguiente:

n	Error	Error Teorema	$r \cdot \eta$
0			0,27009247
1	0,2432198237	0,02835991888267824	0,29845239
2	0,0062275507	0,00031962337547674	0,29877202
3	0,0000021944	0,00000004064346764	0,29877206
4	0,0000000009	0,00000000000000066	0,29877206

cabe mencionar que el valor de $r \cdot \eta$ es el radio de la bola en el cual se encuentran los valores del vector solución.

• Se concluye la utilización de variar el η con los nuevos no es solo porque mejora el error del método sino también porque reduce el número de operaciones como se muestra en la tabla siguiente con respecto al segundo ejemplo de aplicación:

n	Error	Error Teorema	$r \cdot \eta$
0			0,27009247342964288
1	0,24321982	0,00302583	0,27311829953822525
2	0,00622755	0,00000004	0,27311834063765383
3	0,00000219	0,00000000	0,27311834063765383

• Es importante tener presente que una desventaja del método iterativo de Chebychev es que se tiene que conocer las dos derivadas de Fréchet para poder dar solución al problema planteado y es debido que se puede no conocer la ecuación por la forma como se presenta el problema en estudio, siendo el caso de los problemas que contiene una ecuación integral.

6. Sugerencia

Siendo concientes que en la vida diaria hay problemas de sistema de ecuaciones no lineales por resolver cada vez con mejor precisión lo cual motiva a seguir analizando y investigando la importancia de los diferentes métodos que existen y que continuaran creandose con sus propias dificultades pero que son muy importantes su utilidad hoy en día.

1. Argyros I.K. Chen D, *Proyecciones* 12(2);119-128, 1993.
2. Argyros I.K. and Szidarovszky F, "The theory and applications of iteration methods", C.R.C. Press, Boca Raton, Fla., 1993.
3. Gutiérrez J.M, *J. Comput. Appl. Math.* **79** (1997), 131-145.
4. Huang Z, *J. Comput. Appl. Math.* **47** (1993) 211-217.
5. 'Kantorovich L.V. Akilov G.P,"Functional Analysis", Pergamon Press. Oxford, 1982.
6. Ortega J.M. Rheinboldt W.C, "Iterative Solution of Non-linear Equations in Several Variables", Academic Press. New York, 1970.
7. Rall L.B, *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations*, Krieger. Huntington. NJ, 1979.
8. Yamamoto T, *Numer Math* 49:203-220, 1986.
9. Candela V, "Estimadores a priori del error para los métodos iterativos de Halley y de Chebyshev", Universitat de València, España, 1988.
10. Candela V. Marquina A, *Computing* 44:169-184, 1990.
11. Candela V. Marquina A, *Computing* 45:355-367, 1990.