Un problema de Optimización y las condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker

Johnny M. Valverde Montoro[†]
Escuela Profesional de Matemática. Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería;
[†]*jvalverde@uni.edu.pe*

Recibido el 19 de mayo del 2020; aceptado el 21 de agosto del 2020

El presente trabajo muestra las condiciones de Karush-Khun-Tucker en problemas de optimización multiobjetivo con funciones objetivo de valor intervalo considerando relaciones de orden parcial sobre la familia de todos los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. Se emplean elementos de la aritmética de intervalos y la diferencia generalizada de Hukuhara.

Palabras clave: KKT, función multivalor intervalo.

This work shows the conditions of Karush-Khun-Tucker in multiobjective optimization problems with objective functions of interval value considering partial order relationships on the family of all closed intervals in $\mathbb{R}$. In the study carried out the interval arithmetic is used and generalized difference of Hukuhara.

Keywords: KKT, funciones multivalor intervalo.

1. Introducción

La imprecisión es algo inevitable en situaciones inesperadas, en consecuencia, considerar la incertidumbre dentro de los problemas de optimización definen una línea de investigación. Los problemas de programación lineal que presentan inexactitud estan muy relacionadas a los problemas de optimización que emplean valores intervalo.
Ishibuchi y Tanaka [5] estudiaron los problemas de programación multiobjetivo con funciones de valor intervalo y propusieron una relación de orden entre dos intervalos cerrados. Los problemas de optimización matemática con funciones objetivo de valor intervalo son estudiadas por Wu [9], empleando la diferencia de Hukuhara y la Aritmética de intervalos se define la Derivada de Hukuhara, conocida como H-derivada, y presenta dos relaciones parciales sobre las cuales plantea las condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker (KKT) en un problema de optimización empleando funciones de valor intervalo. En base a este trabajo se extiende este estudio a las funciones multiobjetivo de valor intervalo y los presenta en el articulo de Wu [10]. Asimismo, en el trabajo de Hosseinzade [4] retoma los estudios de Wu, incidiendo sobre las relaciones de orden parcial planteadas por este investigador.
La diferencia de Hukuhara es extendida a la que se conoce como la diferencia generalizada de Hukuhara y de este modo la H-Derivada da paso a la que se conoce como la Derivada Generalizada de Hukuhara o simplemente gH-derivada presentado por Stefanini [7]. Chalco [3] presenta nuevas relaciones de orden parcial para replantear las condiciones en los problemas de optimización de funciones de valor intervalo aplicando la gH-derivada, tomando como referencia las relaciones de orden parcial trabajadas por Wu [9]. Se desarrolla una extensión a conjuntos difusos por Stefanini [8] empleando la diferencia generalizada de Hukuhara. En este trabajo Se trata de estudiar la existencia de una solución óptima de un problema de optimización para el caso de funciones multivalor de valor intervalo empleando una reformulación de las condiciones de Karush Khun Tucker considerando la derivada generalizada de Hukuhara.

2. Preliminares

Sea $\mathscr{I}$ la clase de todos los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$. Sobre $\mathscr{I}$ se operan sus elementos en base a la aritmética de intervalos (Moore [6]).

2.1. Diferencia de Hukuhara

Sean $A = [a^I, a^S]$ y $B = [b^I, b^S]$ dos elementos de $\mathscr{I}$. Si existe un intervalo cerrado $C = [c^I, c^S]$ de modo que $A = B + C$, entonces C es llamada la diferencia de Hukuhara. Desde que $A = B + C$, no es difícil ver que $a^I = b^I + c^I$ y $a^S = b^S + c^S$, esto es, $c^I = a^I - b^I$ y $c^I = a^I - b^I$. Por lo tanto, este intervalo cerrado C existe si $a^I - b^I \leq a^S - b^S$, esto el ancho de B no supere al ancho de A. En este caso, $C = [a^I - b^I, a^S - b^S]$ y escribimos $C = A \ominus B$. En consecuencia, cuando decimos que la diferencia de Hukuhara $C = A \ominus B$ existe, implícitamente significa que $a^I - b^I \leq a^S - b^S$.
El ancho de un intervalo cerrado $A = [a^I, a^S]$ en $\mathbb{R}$, denotado por $w(A)$, es la cantidad $w(A) = a^S - a^I$. Se puede notar que no siempre existe esta diferencia.

Ejemplo 1. *sean* $A = [1, 2]$ *y* $B = [2, 5]$. *Como el ancho de A,* $w(A) = 1$, *es menor que el ancho de B,* $w(B) = 3$ *entonces no existe* $C = A \ominus B$

De esto se puede notar que no siempre esta definida la diferencia de Hukuhara.

2.2. Diferencia Generalizada de Hukuhara

Como la diferencia de Hukuhara es muy restrictiva, esto conlleva a tener que replantearla y proponer la denominada Diferencia Generalizada de Hukuhara.

Definición 2.1. *(Stefanini y Bede [7]) La Diferencia Generalizada de Hukuhara, denominada gH-diferencia, entre dos intervalos cerrados $C = [c^I, c^S]$ y $D = [d^I, d^S]$, elementos de $\mathscr{I}$, se define*

$$C \ominus_g D = E \Leftrightarrow \begin{cases} C = D + E, & si\ w(C) \geq w(D) \\ D = C + (-1)E, & si\ w(C) < w(D) \end{cases} \tag{1}$$

donde $w(C)$ y $w(D)$ son los anchos de los intervalos cerrados C y D respectivamente.

Esta nueva diferencia tiene propiedades interesantes, se puede observar que para cualquier $C \in \mathscr{I}$ se cumple $C \ominus_g C = \{0\} = [0, 0]$, donde los conjuntos unitarios $\{0\}$ en $\mathbb{R}$ se consideraran como intervalos cerrados degenerados, denotados por $[a, a]$. Asimismo, la gH-diferencia siempre existe entre dos intervalos cerrados cualesquiera en $\mathbb{R}$, esto es, para cualquier par de elementos de $\mathscr{I}$ se obtiene la gH-diferencia.

Proposición 2.1. *(Stefanini y Bede [7]) Sean los intervalos cerrados $C = [c^I, c^S]$ y $D = [d^I, d^S]$, elementos cualesquiera de $\mathscr{I}$, se tiene que*

$$\begin{aligned} C \ominus_g D =& [Min\left\{c^I - d^I, c^S - d^S\right\}, \\ & Max\left\{c^I - d^I, c^S - d^S\right\}] \end{aligned} \tag{2}$$

Ejemplo 2. *sean* $A = [-1, 4]$ *y* $B = [1, 3]$,
$C = A \ominus_g B = [Min\{-1-1, 4-3\}, Max\{-1-1, 4-3\}]$
$= [Min\{-2, 1\}, Max\{-2, 1\}] = [-2, 1]$,
donde $w(B) = 2 < w(A) = 5$

Ejemplo 3. *sean* $A = [1, 3]$ *y* $B = [2, 5]$,
$C = A \ominus_g B = [Min\{1-2, 3-5\}, Max\{1-2, 3-5\}]$
$= [Min\{-1, -2\}, Max\{-1, -2\}] = [-2, -1]$, *donde* $w(A) = 2 < w(B) = 3$

Proposición 2.2. *sean A, B, $C \in \mathscr{I}$ cualesquiera. Se cumple*

(i) $k(A \ominus_g B) = kA \ominus_g kB$, $k \in \mathbb{R}$

(ii) $A \ominus_g B = [0, 0]$ *si y solo si* $A = B$

(iii) $(A + B) \ominus_g (A + C) = B \ominus_g C$

Demostración. (i) y (ii) se obtienen de la definición 2.1. (iii) sea $D \in \mathscr{I}$ de modo que $(A+B) \ominus_g (A+C) = D$. Por la definición de la gH-diferencia se cumple que $A + B = A + C + D$ o $A + C = A + B + (-1)D$. De esto, se tiene que $B = C + D$ o $C = B + (-1)D$ y por definición de la gH-diferencia se tiene que $B \ominus_g C$ □

2.3. Diferenciabilidad de funciones de valor intervalo

Considerando los elementos del cálculo clásico se tiene que para un abierto $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ y una función de valor intervalo $F : X \to \mathscr{I}$, con $F(x) = [F^I(x), F^S(x)]$, donde F^I y F^S son funciones reales sobre X, se dice que F es diferenciable en x_0 siempre que las funciones reales F^I y F^S sean diferenciables en x_0 (en el sentido usual). En base a la diferencia de Hukuhara se plantea el siguiente tipo de diferenciabilidad (Wu [9]):

Definición 2.2. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}$. Una función de valor intervalo $F : X \to \mathscr{I}$ es denominada H-*diferenciable *(o* fuertemente diferenciable*) en $x_0 \in \mathbb{R}$ si existe un intervalo cerrado $A(x_0) \in \mathscr{I}$ (el cual depende de x_0) de modo que los límites*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0 + h) \ominus F(x_0)}{h} \quad y \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0) \ominus F(x_0 - h)}{h}$$

*ambos existen y son iguales a $A(x_0)$. En este caso, $A(x_0)$ es llamada la H-*derivada *de F en x_0.*

Ejemplo 4. *Sea $F : \mathbb{R} \to [(x-1)^2+1, x^2+2]$ una función de valor intervalo definida sobre $\mathbb{R}$. Se puede ver que F es H-diferenciable en cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, con H-derivada $[2x_0 - 2, 2x_0]$.*

Se debe notar que cuando F es H-diferenciable en x_0, de manera implícita se tiene que $F(x_0 + h) \ominus F(x_0)$ y $F(x_0) \ominus F(x_0 - h)$ existen para todo $h > 0$.
Pero, la Derivada de Hukuhara es muy restrictiva debido a que la Diferencia de Hukuhara no siempre existe, ya que esta limitada por su propia definición. Por tal motivo, se defne la Derivada Generalizada de Hukuhara.

Definición 2.3. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}$, $t_0 \in X$. La Derivada generalizada de Hukuhara, denominada gH-derivada, de una función de valor intervalo $F : X \to \mathscr{I}$ en t_0, está definida como*

$$F'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) \ominus_g F(t_0)}{h}. \tag{3}$$

Si existe $F'(t_0) \in \mathscr{I}$ satisfaciendo (3), entonces se dice que F es $gH-$diferenciable en t_0. Se dice que la función de valor intervalo $F : X \to \mathscr{I}$ es $gH-$diferenciable en X si F es $gH-$diferenciable en cada $t_0 \in X$. El siguiente resultado, presentado por Chalco [3], expresa la $gH-$derivada en términos de los extremos de la imagen (intervalo cerrado) de la función valor intervalo.

Teorema 2.3. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}$, $t_0 \in X$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. Si F^I y F^S son funciones diferenciables en $t_0 \in X$, entonces F es $gH-$diferenciable en t_0 y*

$$\begin{aligned} F'(t_0) = &\left[\text{mín}\left\{(F^I)'(t_0), (F^S)'(t_0)\right\}, \right. \\ &\left. \text{máx}\left\{(F^I)'(t_0), (F^S)'(t_0)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Se debe notar que el recíproco del Teorema 2.3 no es cierto, es decir, la $gH-$diferenciabilidad de F no implica la diferenciabilidad de F^I y F^S (en el sentido usual). Por ejemplo, si se considera la función F de valor intervalo, dada por $F(t) = [-|kt|, |kt|], k \neq 0$, se tiene que F es $gH-$diferenciable en $t_0 = 0$ y $F'(0) = [-k, k]$. Sin embargo F^I y F^S no son funciones diferenciables en $t_0 = 0$. En general, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.4. *(Chalco [3]) Sea X un abierto en $\mathbb{R}$, $t_0 \in X$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. Se tiene que, F es $gH-$diferenciable en $t_0 \in X$ cuando y sólo cuando uno de los siguientes casos es válido*

(a) F^I y F^S son diferenciables en t_0;

(b) las derivadas laterales $(F^I)'_-(t_0), (F^I)'_+(t_0)$, $(F^S)'_-(t_0)$ y $(F^S)'_+(t_0)$ existen y satisfacen $(F^I)'_-(t_0) = (F^S)'_+(t_0)$ y $(F^I)'_+(t_0) = (F^S)'_-(t_0)$.

A partir de este teorema se deduce la siguiente proposición:

Proposición 2.5. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}$, $t_0 \in X$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. Si F es $gH-$diferenciable en t_0, entonces $(F^I + F^S)$ es una función diferenciable en t_0.*

Se extenderá el estudio de las funciones valor intervalo sobre $\mathbb{R}^n$, esto es, $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n)$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, para cada $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia, también se tienen las correspondientes funciones reales $F^I(\mathbf{x}) = F^I(x_1, \ldots, x_n)$ y $F^S(\mathbf{x}) = F^S(x_1, \ldots, x_n)$ definidas sobre $\mathbb{R}^n$, de modo que $F(\mathbf{x}) = [F^I(\mathbf{x}), F^S(\mathbf{x})] \in \mathscr{I}$.

Proposición 2.6. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. Se cumple que F es continua en x_0 si y solo si F^I y F^S son continuas en x_0.*

Recordando del Cálculo la siguiente afirmación:

Proposición 2.7. *Sea f una función real definida sobre $\mathbb{R}^n$. Si asumimos que una de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existe en $\mathbf{x}_0$ y que las $n-1$ derivadas parciales restantes existen en alguna vecindad de $\mathbf{x}_0$ y son continuas en $\mathbf{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.*

Se plantea la siguiente definición:

Definición 2.4. *Sea F una función de valor intervalo definida en $X \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ un elemento de X fijo. Se dice que F es continuamente $gH-$diferenciable en x_0 si todas las $gH-$derivadas parciales $(\frac{\partial F}{\partial x_1})_g(x_0), \ldots, (\frac{\partial F}{\partial x_n})_g(x_0)$ existen en alguna vecindad de x_0 y son continuas en x_0 (en el sentido de función valor intervalo).*

Definición 2.5. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}^n$, $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$, $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ un elemento de X fijo y la función de valor intervalo h_i definida por $h_i(x_i) = F(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ Si h_i es $gH-$diferenciable en $x_i^{(0)}$, entonces se dice que F tiene la i-ésima $gH-$derivada parcial en x_0 (denotado por $(\frac{\partial F}{\partial x_i})_g(x_0)$, donde $(\frac{\partial F}{\partial x_i})_g(x_0) = (h_i)'(x_i^{(0)})$.*

Proposición 2.8. *Sea F una función de valor intervalo definida en $X \subset \mathbb{R}^n$, donde $F(x) = [F^I(x), F^S(x)]$, para $x \in X$. Si F es continuamente $gH-$diferenciable en x_0, entonces $(F^I + F^S)$ es continuamente diferenciable en x_0.*

Demostración. Como $F(x) = [F^I(x), F^S(x)]$, $x \in \mathbb{R}^n$. En el caso de que si $(\frac{\partial F}{\partial x_i})_g(x_0)$ existe, entonces, de la Proposición 2.5, la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}(F^I + F^S)(x_0)$ existe. Por otro lado, de la Proposición 2.5 y 2.6, como $(\frac{\partial F}{\partial x_i})_g(x_0)$ es continua, entonces $\frac{\partial}{\partial x_i}(F^I + F^S)$ es continua en x_0. En consecuencia, si F es continuamente $gH-$diferenciable en x_0, entonces la función de valor real $(F^I + F^S)$ es continuamente diferenciable en x_0. □

A continuación se presenta una definición que ha sido tomada de Chalco [3], la cual es una reformulación de la presentada por Wu [9].

Definición 2.6. *Se dice que la función de valor intervalo $F : X \to \mathscr{I}$ es (débilmente) continuamente diferenciable en $x_0 \in X$ si las funciones de valor real F^I y F^S son continuamente diferenciables en x_0 , esto es, todas las derivadas parciales de F^I y F^S existen en algunas vecindades de x_0 y son continuas en x_0 (en el sentido usual).*

Definición 2.7. *Sea X un abierto en $\mathbb{R}^n$, $t_0 = \left(t_1^{(0)}, \ldots, t_n^{(0)}\right)$ un elemento de X fijo y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo de modo que $F(t) = [F^I(t), F^S(t)]$. El gradiente gH de F en t_0, denotado por $\nabla_g F(\boldsymbol{t}_0)$, está definido por*

$$\nabla_g F(\boldsymbol{t}_0) = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_g(\boldsymbol{t}_0), \ldots, \left(\frac{\partial F}{\partial t_n}\right)_g(\boldsymbol{t}_0)\right)$$

donde $(\frac{\partial F}{\partial t_j})_g(\boldsymbol{t}_0)$ es la j-ésima gH-derivada parcial de f en $\boldsymbol{t}_0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, como fue definido en la Definición 2.5. Se puede observar que si las funciones extremas F^I y F^S son funciones diferenciables, entonces F es gH-diferenciable y en este caso

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_g(\boldsymbol{x}_0) = [A, B]$$

es un intervalo cerrado, con $j = 1, 2, \ldots, n$ donde:

$$A = min\left\{\frac{\partial F^I}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial F^S}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right\}$$

$$B = max\left\{\frac{\partial F^I}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial F^S}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right\}$$

Ejemplo 5. *Considere la función F de valor intervalo definida por*

$$F(x) = F(x_1, x_2) = \left[x_1 + {x_2}^2, {x_1}^2 + {x_2}^2 + 3\right].$$

Entonces tenemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_g (x_1, x_2) = [min\{1,2x_1\}, max\{1, 2x_1\}]$$

y

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_g (x_1, x_2) &= [min\{2x_2, 2x_2\}, max\{2x_2, 2x_2\}] \\ &= [2x_2, 2x_2]\end{aligned}.$$

Así, el gradiente gH de F está dada por

$$\nabla_g F(x_1, x_2) = ([min\{1, 2x_1\}, max\{1, 2x_1\}], [2x_2, 2x_2]).$$

Ahora, se considerarán las funciones multivalor intervalo F, las cuales están definidas sobre el abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, con $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$, donde cada una de las $F_i : X \to \mathscr{I}$ son funciones de valor intervalo, para $i = 1, 2, \ldots, q$, esto es, $F_i(t) = [F_i^I(t), F_i^S(t)]$, $t \in X$, para $i = 1, 2, \ldots, q$.

Ejemplo 6. *sea F una función multivalor intervalo definida sobre $\mathbb{R}^2$ dada por $F(x_1, x_2) = ([x_1^2 + 2x_1x_2, x_1 + x_2^2 + 3], [x_1^2 + 3, 3x_1x_2])$*
donde: $F_1(x_1, x_2) = [x_1^2 + 2x_1x_2, x_1 + x_2^2 + 3]$
$F_2(x_1, x_2) = [x_1^2 + 3, 3x_1x_2]$
F_1 y F_2 son funciones valor intervalo en $\mathbb{R}^2$

Definición 2.8. *Sea F una función multivalor definida sobre el abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, con $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$. Se dice que F es*

a) (debilmente) continuamente diferenciable en $x_0 \in X$ si F_i es (debilmente) continuamente diferenciable en x_0, para cada $i = 1, 2, \ldots, q$

b) continuamente gH-diferenciable en $x_0 \in X$ si F_i es continuamente gH-diferenciable en x_0, para cada $i = 1, 2, \ldots, q$

Proposición 2.9. *Sea F una función multivalor intervalo definida sobre el abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, con $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$, donde $F_i(t) = [F_i^I(t), F_i^S(t)]$, $t \in X$, para $i = 1, 2, \ldots, q$. Se cumple que*

a) si F_i^I, F_i^S son diferenciables en x_0, para cada $i = 1, 2, \ldots, q$, entonces F es (debilmente) continuamente diferenciable en $x_0 \in X$.

b) si F es continuamente gH-diferenciable en $x_0 \in X$, entonces $(F_i^I + F_i^S)$ es continuamente diferenciable en x_0, para cada $i = 1, 2, \ldots, q$.

Demostración. (i) se obtiene de las definiciones 2.6 y 2.8 (ii) es consecuencia de la definición 2.8 y de la proposición 2.8. □

3. Formulación del problema de investigación

Las condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker se tienen que replantear para las funciones de valor intervalo. Para lograr esto se deben de proponer nuevas relaciones de orden parcial entre los miembros de la familia de intervalos cerrados $\mathscr{I}$, las cuales serán extendidas a los vectores intervalo, cuyos componentes serán elementos de $\mathscr{I}$.

La presente investigación se enmarca en un estudio que involucra la diferenciabilidad aplicada a funciones de valor intervalo teniendo que emplear un nuevo tipo de derivada: la derivada H (de Hukuhara). Este tipo de derivada se basa sobre la diferencia de Hukuhara, la cual es muy restrictiva, motivo por el cual se debe extender a la diferencia generalizada de Hukuhara lo que permitirá definir la denominada derivada generalizada de Hukuhara conocida como la gH-Derivada, Stefanini [7]. En los problemas de optimización lo que se busca es minimizar o maximizar una función objetivo y en el presente estudio el problema de investigación lo formulamos por medio de la siguiente pregunta: En los problemas de optimización lo que se busca es minimizar o maximizar una función objetivo y en el presente estudio el problema de investigación lo formulamos por medio de la siguiente pregunta:

¿Existe solución para el siguiente programa matemático

$$\begin{array}{lll}(\text{P}) & \text{mín} & F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_q(\mathbf{x})) \\ & \text{sujeto a} & g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\end{array}$$

de modo que satisfaga las condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker donde F es una función multivalor intervalo (sus componentes son funciones de valor intervalo)?

4. Optimización de funciones de valor intervalo

Se tiene los siguientes programas matemáticos:

$$\begin{array}{lll}\textbf{(IP1)} & \text{mín} & f(x) = [f^I(x), f^S(x)] \\ & \text{sujeto a} & x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n.\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}\textbf{(IP2)} & \text{mín} & f(x) = [f^I(x), f^S(x)] \\ & \text{sujeto a} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m\end{array}$$

Se puede observar que en ambos problemas, las funciones objetivo son funciones de valor intervalo. Además, el programa matemático (IP2) se puede expresar como el problema (IP1) considerando el conjunto admisible
$X = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n$,
donde g_i, $i = 1, \ldots, m$ son funciones de valor real definidas en $\mathbb{R}^n$. Para poder resolver estos programas matemáticos previamente se tiene que proponer una relación de orden en $\mathscr{I}$. A continuacion se proponen tres tipos de relaciones de orden en $\mathscr{I}$

Definición 4.1. *(Wu [9]) Sean $C = [c^I, c^S]$, $D = [d^I, d^S]$, elementos de $\mathscr{I}$. Se tiene que*

$$C \preceq_{\text{IS}} D \text{ siempre y cuando, } c^I \leq d^I \text{ y } c^S \leq d^S \quad (5)$$

Ejemplo 7. *sean $C = [3,5]$ y $D = [4,5]$, se observa que $C \preceq_{\text{IS}} D$*

Se puede observar que "$\preceq_{\text{IS}}$"es relación de orden parcial sobre $\mathscr{I}$, porque es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
Además, se escribe $C \prec_{\text{IS}} D$, siempre y cuando, $C \preceq_{\text{IS}} D$ y $C \neq D$. Equivalentemente, $C \prec_{\text{IS}} D$, cuando y solo cuando,

$$\begin{cases} c^I < d^I \\ c^S \leq d^S \end{cases} \text{o} \quad \begin{cases} c^I \leq d^I \\ c^S < d^S \end{cases} \text{o} \quad \begin{cases} c^I < d^I \\ c^S < d^S \end{cases}. \quad (6)$$

Definición 4.2. *(Wu [9]) Sea $\mathbf{x}^*$ una solución factible, esto es, $\mathbf{x}^* \in X$. Se dice que $\mathbf{x}^*$ es una* solución de tipo I *del problema (IP1) si no existe $\bar{\mathbf{x}} \in X$ de modo que $f(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{\text{IS}} f(\mathbf{x}^*)$.*

A continuación se presentará la segunda relación de orden parcial (presentada por Ishibuchi y Tanaka [5]). Sea $A = [a^I, a^S] \in \mathscr{I}$. Se puede calcular su centro $a^C = \frac{1}{2}(a^I + a^S)$ y su semilongitud $a^R = \frac{w(A)}{2} = \frac{1}{2}(a^S - a^I)$ de A. En esta situación se puede emplear la notación $\langle a^C, a^R \rangle$ para denotar el intervalo cerrado A como $A = \langle a^C, a^R \rangle$, esto es, $A = [a^I, a^S] = \langle a^C, a^R \rangle$.

Definición 4.3. *Sean $A = [a^I, a^S] = \langle a^C, a^R \rangle$, $B = [b^I, b^S] = \langle b^C, b^R \rangle \in \mathscr{I}$. Se dice que*

$$A \preceq_{\text{CR}} B \text{ siempre y cuando, } a^C \leq b^C \text{ y } a^R \leq b^R \quad (7)$$

También, se escribe $A \prec_{\text{CR}} B$ cuando y solo cuando $A \preceq_{\text{CR}} B$ y $A \neq B$. Además, se escribe equivalentemente, $A \prec_{\text{CR}} B$ siempre y cuando,

$$\begin{cases} a^C < b^C \\ a^R \leq b^R \end{cases} \text{o} \quad \begin{cases} a^C \leq b^C \\ a^R < b^R \end{cases} \text{o} \quad \begin{cases} a^C < b^C \\ a^R < b^R \end{cases}. \quad (8)$$

Definición 4.4. *Sea $\mathbf{x}^*$ una solución factible, es decir, $\mathbf{x}^* \in X$. Decimos que $\mathbf{x}^*$ es una* solución de tipo II *del problema (IP1) si no existe $\bar{\mathbf{x}} \in X$ de modo que $f(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{\text{IS}} f(\mathbf{x}^*)$ o $f(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{\text{CR}} f(\mathbf{x}^*)$.*

Observación 4.1. Sea $\mathbf{x}^*$ una solución factible, es decir, $\mathbf{x}^* \in X$. Se puede observar, por la propia definición 4.4, de que si $\mathbf{x}^*$ es una solución de tipo I del problema (IP1), entonces $\mathbf{x}^*$ es también una solución de tipo II del problema (IP1).

Finalmente se tiene la tercera relación de orden presentada por Chalco [3]. Sea $A = [a^I, a^S] \in \mathscr{I}$ su longitud o ancho es $w(A)$ y se denotará por a^W. Así se tiene que

$$a^W = w(A) = a^S - a^I$$

Definición 4.5. *Sean $A = [a^I, a^S]$, $B = [b^I, b^S] \in \mathscr{I}$. Se tiene que*

$$A \preceq_{\text{IW}} B \text{ siempre y cuando, } a^I \leq b^I \text{ y } a^W \leq b^W \quad (9)$$

Se puede observar que "$\preceq_{\text{IW}}$"es una relación de orden parcial sobre $\mathscr{I}$, porque es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
Además, se escribe $A \prec_{\text{IW}} B$ siempre y cuando, $A \preceq_{\text{IW}} B$ y $A \neq B$. Equivalentemente, $A \prec_{\text{IW}} B$ si, y solo si,

$$\begin{cases} a^I < b^I \\ a^W \leq b^W \end{cases} \text{o} \quad \begin{cases} a^I \leq b^I \\ a^W < b^W \end{cases} \text{o} \quad \begin{cases} a^I < b^I \\ a^W < b^W \end{cases}. \quad (10)$$

Definición 4.6. *(Chalco [3]) Sea $\mathbf{x}^*$ una solución factible, esto es, $\mathbf{x}^* \in X$. Decimos que $\mathbf{x}^*$ es una* solución de tipo III *del problema (IP1) si no existe $\bar{\mathbf{x}} \in X$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) \prec_{\text{IW}} f(\mathbf{x}^*)$.*

Proposición 4.1. *Sean A, $B \in \mathscr{I}$ cualesquiera. Si $A \preceq_{IW} B$, entonces $A \preceq_{IS} B$.*

Demostración. Ya que A y B son intervalos cerrados, de modo que $A \preceq_{IW} B$, se tiene

$$a^I \leq b^I \quad \text{y} \quad a^S - a^I = w(A) \leq w(B) = b^S - b^I.$$

Así,

$$a^S - a^I + b^I \leq b^S$$

entonces

$$a^S \leq a^S + (b^I - a^I) \leq b^S.$$

En consecuencia, $A \preceq_{IS} B$. □

Se debe notar que el recíproco de la Proposición (4.1) no es válida. Por ejemplo, si consideramos $A = [-2, 0]$ y $B = [-1, 0]$, entonces $A \preceq_{IS} B$ pero $A \npreceq_{IW} B$.

Teorema 4.2. *Sea $\mathbf{x}^*$ una solución factible de (IP1). Si $\mathbf{x}^*$ es una solución tipo I del problema (IP1), entonces $\mathbf{x}^*$ es una solución del tipo III del problema (IP1).*

Demostración. como $\mathbf{x}^* \in X$. Suponer que $\mathbf{x}^*$ no es una solución tipo III del problema (IP1), entonces existe $\mathbf{x} \in X$ tal que $F(\mathbf{x}) \preceq_{IW} F(\mathbf{x}^*)$ y $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{x}^*)$. de la Proposición (4.1) $F(\mathbf{x}) \preceq_{IS} F(\mathbf{x}^*)$ y $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{x}^*)$, lo cual es una contradicción, generado por lo supuesto. □

A continuación, se redefinirá el concepto de funciones convexas desde la perspectiva de funciones de valor intervalo.

Definición 4.7. *(Chalco [3]) Sea el conjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y la función $F : X \to \mathscr{I}$ de valor intervalo, con $F(\mathbf{x}) = [F^I(\mathbf{x}), F^S(\mathbf{x})]$. Se dice que F es*

(i) IS-convexa *en $\mathbf{x}^*$ si*

$$F(\lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}) \preceq_{\text{IS}} \lambda F(\mathbf{x}^*) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}), \quad (11)$$

para cada $\lambda \in]0,1[$ y cada $\mathbf{x} \in X$

(ii) CR-convexa *en $\mathbf{x}^*$ si*

$$F(\lambda \mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}) \preceq_{\text{CR}} \lambda F(\mathbf{x}^*) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}), \quad (12)$$

para cada $\lambda \in]0,1[$ y cada $\mathbf{x} \in X$

(iii) IW-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si*

$$F(\lambda\mathbf{x}^*+(1-\lambda)\mathbf{x}) \preceq_{\mathrm{IW}} \lambda F(\mathbf{x}^*)+(1-\lambda)f(\mathbf{x}), \quad (13)$$

para cada $\lambda \in]0,1[$ *y cada* $\mathbf{x} \in X$

Proposición 4.3. *Sean X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $F : X \to \mathscr{I}$ una función de valor intervalo, con $F(\mathbf{x}) = [F^I(\mathbf{x}), F^S(\mathbf{x})]$. Se cumple que:*

(i) F es IS-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F^I y F^S son convexas en $\mathbf{x}^*$.

(ii) F es CR-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F^C y F^R son convexas en $\mathbf{x}^*$.

(iii) F es IW-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F^I y F^W son convexas en $\mathbf{x}^*$.

(iv) Si F es IW-convexa en $\mathbf{x}^*$, entonces F es también IS-convexa en $\mathbf{x}^*$.

Demostración. Los incisos (i), (ii) y (iii) son consecuencia de la definición, y (iv) se obtiene como consecuencia de la proposición 4.1. □

Ahora, se extenderá estas relaciones de orden a los vectores cuyos componentes son valor intervalo.

Definición 4.8. *Sea $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ es denominado vector de valor intervalo si $C_j \in \mathscr{I}$, para cualquier $j = 1, 2, \ldots, q$*

Definición 4.9. *Sean $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ y $D = (D_1, D_2, \ldots, D_q)$ vectores de valor intervalo, se dice que*

(i) $C \preceq_{\mathrm{IS}} D$ siempre y cuando $C_j \preceq_{\mathrm{IS}} D_j$ con $j = 1, 2, \ldots, q$.

(ii) $C \prec_{\mathrm{IS}} D$ siempre y cuando, $C_j \preceq_{\mathrm{IS}} D_j$, para $j = 1, 2, \ldots, q$; y
$C_k \prec_{\mathrm{IS}} D_k$ para al menos un índice k.

Definición 4.10. *Sean $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ y $D = (D_1, D_2, \ldots, D_q)$ vectores de valor intervalo se dice que*

(i) $C \preceq_{\mathrm{CR}} D$ siempre y cuando $C_j \preceq_{\mathrm{CR}} D_j$, con $j = 1, 2, \ldots, q$.

(ii) $C \prec_{\mathrm{CR}} D$ siempre y cuando $C_j \preceq_{\mathrm{CR}} D_j$, para $j = 1, 2, \ldots, q$; y
$C_k \prec_{\mathrm{CR}} D_k$ para al menos un índice k.

Definición 4.11. *Sean $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ y $D = (D_1, D_2, \ldots, D_q)$ vectores de valor intervalo se dice que*

(i) $C \preceq_{\mathrm{IW}} D$ siempre y cuando $C_j \preceq_{\mathrm{IW}} D_j$, con $j = 1, 2, \ldots, q$.

(ii) $C \prec_{\mathrm{IW}} D$ siempre y cuando $C_j \preceq_{\mathrm{IW}} D_j$, para $j = 1, 2, \ldots, q$; y
$C_k \prec_{\mathrm{IW}} D_k$ para al menos un índice k.

Proposición 4.4. *Sean $C = (C_1, C_2, \ldots, C_q)$ y $D = (D_1, D_2, \ldots, D_q)$ vectores de valor intervalo se dice que*

(i) si $C \preceq_{\mathrm{IW}} D$, entonces $C \preceq_{\mathrm{IS}} D$.

(ii) si $C \prec_{\mathrm{IW}} D$, entonces $C \prec_{\mathrm{IS}} D$.

Demostración. (i) Como C y D son vectores valor intervalo y $C \preceq_{\mathrm{IW}} D$, entonces $C_j \preceq_{\mathrm{IW}} D_j$, para $j = 1, 2, \ldots, q$.
Luego, por la proposición (4.1) se tiene que $C_j \preceq_{\mathrm{IS}} D_j$, $j = 1, 2, \ldots, q$.
En consecuencia, se cumple que $C \preceq_{\mathrm{IS}} D$

(ii) análogo a lo anterior.

□

Definición 4.12. *Sea el conjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y la función F multivalor intervalo definida sobre X, esto es, $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$, donde cada una de las $F_i : X \to \mathscr{I}$ son funciones de valor intervalo, para $i = 1, 2, \ldots, q$. Se dice que F es*

(I) IS-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si cada* F_j *es* IS-convexa *en* $\mathbf{x}^*$, $j = 1, 2, \ldots, q$.

(II) CR-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si cada* F_j *es* CR-convexa *en* $\mathbf{x}^*$, $j = 1, 2, \ldots, q$.

(III) IW-convexa *en* $\mathbf{x}^*$ *si cada* F_j *es* IW-convexa *en* $\mathbf{x}^*$, $j = 1, 2, \ldots, q$.

Proposición 4.5. *Sea el conjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y la función F multivalor intervalo definida sobre X, esto es, $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$, donde cada una de las $F_j : X \to \mathscr{I}$ son funciones de valor intervalo, para $j = 1, 2, \ldots, q$. Se cumple que:*

(I) F es IS-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F_j^I y F_j^S son convexas en $\mathbf{x}^*$, $j = 1, 2, \ldots, q$..

(II) F es CR-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F_j^C y F_j^R son convexas en $\mathbf{x}^*$, $j = 1, 2, \ldots, q$..

(III) F es IW-convexa en $\mathbf{x}^*$ siempre y cuando F_j^I y F_j^W son convexas en $\mathbf{x}^*$, $j = 1, 2, \ldots, q$.

(iv) Si F es IW-convexa en $\mathbf{x}^*$, entonces F es también IS-convexa en $\mathbf{x}^*$.

5. Optimizacion de programas matemáticos con función multiobjetivo de valor intervalo

Las funciones multivalor intervalo F, las cuales están definidas sobre un abierto $X \subset \mathbb{R}^n$, son aquellas de la forma $F(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_q(t))$, $t \in X$, donde cada una de las $F_i : X \to \mathscr{I}$ son funciones de valor intervalo, para $i = 1, 2, \ldots, q$, esto es, $F_i(t) = [F_i^I(t), F_i^S(t)]$, $t \in X$, para $i = 1, 2, \ldots, q$. A continuación se presentan los programas matemáticos, cuyas funciones multiobjetivo son funciones multivalor intervalo

$$\textbf{(MP1)} \quad \text{mín} \quad F(x) = (F_1(x), \ldots, F_q(x))$$
$$\text{sujeto a} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n.$$

donde los $F_i(x) = [F_i^I(x), F_i^S(x)]$, $x \in X$, para $i = 1, 2, \dots, q$, son funciones de valor intervalo y el conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ será considerado convexo en $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lll} \textbf{(MP2)} & \text{mín} & F(x) = (F_1(x), \dots, F_q(x)) \\ & \text{sujeto a} & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

donde las funciones restricción de valor real $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son convexas en $\mathbb{R}^n$ para $i = 1, \dots, m$; y las componentes F son funciones de valor intervalo. Además, el programa matemático (MP2) se puede expresar como el problema (MP1) considerando el conjunto admisible
$X = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^n$.

5.1. Condiciones de optimalidad de Pareto

Se presentan los diferentes conceptos de solución óptima de Pareto.

Definición 5.1. *Sea x^* una solución factible del problema (MP1), se dice que x^**

(i) es una solución óptima de Pareto tipo-I del problema (MP1) si no existe $\overline{x} \in X$ de modo que $F(\overline{x}) \prec_{IS} F(x^*)$.

(ii) es una solución óptima de Pareto fuertemente tipo-I del problema (MP1) si no existe $\overline{x} \in X$ de modo que $F(\overline{x}) \preceq_{IS} F(x^*)$.

(iii) es una solución óptima de Pareto débilmente tipo-I del problema (MP1) si no existe $\overline{x} \in X$ de modo que $F_k(\overline{x}) \prec_{IS} F_k(x^*)$ para todo $k = 1, \dots, q$.

Observación 5.1. *Sea $X_{wp}^{(I)}$, $X_p^{(I)}$ y $X_{sp}^{(I)}$, denotan el conjunto de todas las soluciones débilmente óptimas de Pareto tipo-I, soluciones óptimas de Pareto tipo-I y soluciones fuertemente óptimas de Pareto tipo-I, respectivamente. Se puede observar que que $X_{sp}^{(I)} \subseteq X_p^{(I)} \subseteq X_{wp}^{(I)}$.*

Definición 5.2. *Sea x^* una solución factible del problema (MP1), se dice que x^**

(i) es una solución óptima de Pareto tipo-II del problema (MP1) si no existe $\overline{x} \in X$ de modo que $F(\overline{x}) \prec_{CR} F(x^*)$.

(ii) es una solución óptima de Pareto fuertemente tipo-II del problema (MP1) si no existe $\overline{x} \in X$ de modo que $F(\overline{x}) \preceq_{CR} F(x^*)$.

(iii) es una solución óptima de Pareto débilmente tipo-II del problema (MP1) si no existe $\overline{x} \in X$ de modo que $F_k(\overline{x}) \prec_{CR} F_k(x^*)$ para todo $k = 1, \dots, q$.

Observación 5.2. *Sea $X_{wp}^{(II)}$, $X_p^{(II)}$ y $X_{sp}^{(II)}$, denotan el conjunto de todas las soluciones débilmente óptimas de Pareto tipo-II, soluciones óptimas de Pareto tipo-II y soluciones fuertemente óptimas de Pareto tipo-II, respectivamente. Se puede observar que que $X_{sp}^{(II)} \subseteq X_p^{(II)} \subseteq X_{wp}^{(II)}$.*

Definición 5.3. *Sea x^* una solución factible del problema (MP1), se dice que x^**

(i) es una solución óptima de Pareto tipo-III del problema (MP1) si no existe $\overline{x} \in X$ de modo que $F(\overline{x}) \prec_{IW} F(x^*)$.

(ii) es una solución óptima de Pareto fuertemente tipo-III del problema (MP1) si no existe $\overline{x} \in X$ de modo que $F(\overline{x}) \preceq_{IW} F(x^*)$.

(iii) es una solución óptima de Pareto débilmente tipo-III del problema (MP1) si no existe $\overline{x} \in X$ de modo que $F_k(\overline{x}) \prec_{IW} F_k(x^*)$ para todo $k = 1, \dots, q$.

Observación 5.3. *Sea $X_{wp}^{(III)}$, $X_p^{(III)}$ y $X_{sp}^{(III)}$, denotan el conjunto de todas las soluciones débilmente óptimas de Pareto tipo-III, soluciones óptimas de Pareto tipo-III y soluciones fuertemente óptimas de Pareto tipo-III, respectivamente. Se puede observar que que $X_{sp}^{(III)} \subseteq X_p^{(III)} \subseteq X_{wp}^{(III)}$.*

Teorema 5.1. *Sea X un conjunto admisible de (MP1). Se cumple*

(i) $X_{SP}^{(I)} \subset X_{SP}^{(III)}$

(ii) $X_P^{(I)} \subset X_P^{(III)}$

(iii) $X_{WP}^{(I)} \subset X_{WP}^{(III)}$

Demostración. (i) considerando que $\mathbf{x}^* \in X_{SP}^{(I)}$
Por contradicción, suponer que $\mathbf{x}^* \notin X_{SP}^{(III)}$.
Luego, por definición 5.3 existe $\overline{\mathbf{x}} \in X$ de modo que $F(\overline{\mathbf{x}}) \preceq_{IW} F(\mathbf{x}^*)$. Por la proposición (4.4), se tiene que $F(\overline{\mathbf{x}}) \preceq_{IS} F(\mathbf{x}^*)$, lo cual es una contradicción.
En consecuencia, $X_{SP}^{(I)} \subset X_{SP}^{(III)}$

(ii) similar a (i)

(iii) considerando que $\mathbf{x}^* \in X_{WP}^{(I)}$. Por contradicción, suponer que $\mathbf{x}^* \notin X_{WP}^{(III)}$.
Luego, por definición 5.3, existe $\overline{\mathbf{x}} \in X$ de modo que $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{IW} F_k(\mathbf{x}^*)$, para $k = 1, 2, \dots, q$
de la proposición (4.4), $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{IS} F_k(\mathbf{x}^*)$, para $k = 1, 2, \dots, q$; lo cual es una contradicción. En consecuencia, $X_{WP}^{(I)} \subset X_{WP}^{(III)}$.

□

5.2. Condiciones de optimalidad de Karush Khun Tucker

Sea el siguiente programa matemático

$$\begin{array}{lll} (P) & min & f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \\ & \text{sujeto a} & g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

donde f y g_i son funciones reales definidas en $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$. Suponga que las funciones restricción g_i son convexas en $\mathbb{R}^n$ para cada $i = 1, \dots, m$, en consecuencia el conjunto factible $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, i = 1, \dots, m\}$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. La conocida condición Karush-Kuhn-Tucker (ver Bazaraa [2]), para el problema (P), es declarada de la siguiente manera:

Teorema 5.2. *[2] Dado el problema (P). Asumiendo que las restricciones $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones convexas en $\mathbb{R}^n$ para $i = 1, \dots, m$, $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0, i = 1, \dots, m\}$ es un conjunto admisible, $x^* \in X$, la función objetivo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa, f y g_i son continuamente diferenciable en x^*, $i = 1, \dots, m$. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 \leqslant \mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, de modo que*

(I) $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0;$

(II) $\mu_i g_i(x^*) = 0$ *para todo* $i = 1, \dots, m.$

entonces x^* es una solución óptima de (P)

Definición 5.4. *[9] Se dice que las funciones de restricción del problema (MP2) satisfacen las condiciones KKT en x^* si estas son convexas en $\mathbb{R}^n$ y continuamente diferenciables en x^*.*

Ahora, las condiciones Karush Khun Tucker (KKT) presentadas en el teorema 5.2 se ampliarán para el caso de las funciones de valor intervalo (Wu[9], Chalco [3]) así como para las funciones multivalor intervalo.

Teorema 5.3. *Dado el programa matemático (MP2), $x^* \in X$. Considerando que F es continuamente gH-diferenciable en x^*; F_j^I, F_j^S son funciones convexas, para $j = 1, \dots, q$. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 < \lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, q$ y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla (F_j^I + F_j^S)(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0;$

(II) $\mu_j g_j(x^*) = 0$ *para todo* $j = 1, \dots, m.$

entonces $x^* \in X_P^{(I)}$ y $x^* \in X_P^{(III)}$ para el programa matemático (MP2).

Demostración. Como F es continuamente gH-diferenciable en $\mathbf{x}^*$, debido a la proposición 2.9 se tiene que $(F_j^I + F_j^S)$ es continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$ para $j = 1, \dots, q$.
Definiendo la función f por $f(x) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla (F_j^I + F_j^S)(x)$
Como F_j^I y F_j^S, para $j = 1, \dots, q$, son funciones reales convexas, se tiene que f es convexa y continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$.
Así $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla (F_j^I + F_j^S)(\mathbf{x}^*)$ y con las condiciones (i) y (ii), se tendría que:

(I)' $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$

(II)' $\mu_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ para todo $j = 1, \dots, m.$

Aplicando el teorema 5.2 (condiciones KKT a funciones reales), se tiene que $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima de la función real f.
Suponiendo que $\mathbf{x}^* \notin X_P^{(I)}$, esto significa que hay un $x \in X$ y $1 \leq k \leq q$ de modo que $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{IS} F_k(\mathbf{x}^*)$, esto implica que $f(x) < f(\mathbf{x}^*)$, lo cual contradice de que f presente un valor óptimo en $\mathbf{x}^*$. En consecuencia, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_P^{(I)}$ y por la proposición 5.1, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_P^{(III)}$ □

Corolario 5.4. *Dado el programa matemático (MP2), $x^* \in X$. Considerando que F es continuamente gH-diferenciable en x^* e IS-convexa en x^*. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0 < \lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, q$ y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla (F_j^I + F_j^S)(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0;$

(II) $\mu_j g_j(x^*) = 0$ *para todo* $j = 1, \dots, m.$

entonces $x^* \in X_P^{(I)}$ y $x^* \in X_P^{(III)}$ para el programa matemático (MP2).

Demostración. Como F es IS-convexa en $\mathbf{x}^*$, aplicando la proposición 4.3, se tiene que F_j^I, F_j^S son funciones convexas, para $j = 1, \dots, q$. Asimismo como F es gH-diferenciable en $\mathbf{x}^*$, aplicando la proposición 2.9 entonces, se tiene que $(F_j^I + F_j^S)$ son continuamente diferenciables en $\mathbf{x}^*$, para $j = 1, \dots, q$.
Definiendo la función f por $f(x) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla (F_j^I + F_j^S)(x)$
se tiene que f es convexa y continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$ y por el teorema anterior se obtendría el resultado esperado. □

Ejemplo 8. *sea la función F multivalor intervalo dada por $F(x) = (F_1(x), F_2(x)$ donde $F_1(x) = [-|(x-1)|, |x-1|]$*
$F_2(x) = [-|\frac{(x-1)}{2}|, |\frac{(x-1)}{2}|]$
Se tiene el siguiente programa matemático

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & F(x) = (F_1(x), F_2(x)) \\ \textit{sujeto a} & \begin{array}{rcl} x-2 & \leq & 0 \\ -x & \leq & 0 \end{array} \end{array}$$

F es continuamente gH-diferenciable y las condiciones del teorema 5.3 son satisfechas en $x = 1$

Teorema 5.5. *Dado el programa matemático (MP2). Considerando que F es CR-convexa y (debil) continuamente diferenciable en x^*. Si existen los multiplicadores de Lagrange*
$0 < \lambda_j^C, \lambda_j^R \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, q$ y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:

(I) $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j^C \nabla F_j^C(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^R \nabla F_j^R(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0;$

(II) $\mu_j g_j(x^*) = 0$ *para todo* $j = 1, \dots, m.$

entonces $x^* \in X_P^{(II)}$ para el programa matemático (MP2).

Demostración. Como $F = (F_1, F_2, \dots, F_q))$ es una función multivalor intervalo, esto es $F_j(x) = (F_j^I, F_j^S)$, (debil) continuamente diferenciable y convexa, entonces los F_j^C y F_j^R son continuamente diferenciables (por definición 2.8 y proposición 2.9) y convexas (proposición 4.3) en $\mathbf{x}^*$ para $j = 1, 2, \dots, q$.
Definiendo la función f por

$$f(x) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^C F_j^C(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^R F_j^R(\mathbf{x}^*)$$

Como F_j^C y F_j^R, para $j = 1, \dots, q$, son funciones reales continuamente diferenciables y convexas, se tiene que f es convexa y continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$.
Así $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^C \nabla(F_j^C)(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^R \nabla(F_j^R)(\mathbf{x}^*)$ y con las condiciones (i) y (ii), se tendría que:

(I') $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$

(II') $\mu_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ para todo $j = 1, \dots, m$.

Aplicando el teorema 5.2 (condiciones KKT a funciones reales), se tiene que $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima de la función real objetivo f bajo las restricciones de (MP2).
Suponiendo que $\mathbf{x}^* \notin X_P^{(II)}$, esto significa que hay un $\overline{\mathbf{x}} \in X$ y $1 \leq k \leq q$ de modo que $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{CR} F_k(\mathbf{x}^*)$, esto implica que $f(\overline{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}^*)$, lo cual contradice de que f presente un valor óptimo en $\mathbf{x}^*$. En consecuencia, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_P^{(II)}$ □

Teorema 5.6. *Dado el programa matemático (MP2). Considerando que F es IW-convexa y (debil) continuamente diferenciable en $\boldsymbol{x}^*$. Si existen los multiplicadores de Lagrange*
$0 < \lambda_j^I, \lambda_j^W \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, q$ *y* $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, *de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j^I \nabla F_j^I(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^W \nabla F_j^W(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0;$

(II) $\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$ *para todo* $j = 1, \dots, m$.

entonces $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(III)}$ *para el programa matemático (MP2).*

Demostración. Como $F = (F_1, F_2, \dots, F_q)$ es una función multivalor intervalo, esto es $F_j(x) = (F_j^I, F_j^W)$, (debil) continuamente diferenciable e IW- convexas en $\mathbf{x}^*$ para $j = 1, 2, \dots, q.$, entonces los F_j^I, F_j^W son continuamente diferenciables (por definición 2.8 y proposición 2.9) y convexas (proposición 4.3) en $\mathbf{x}^*$ para $j = 1, 2, \dots, q$.

Definiendo la función f por $f(x) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^I F_j^I(x) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^W F_j^W(x)$
Como F_j^I, F_j^W (para $j = 1, \dots, q$), y g_i (para $j = 1, \dots, m$) , son funciones reales continuamente diferenciables y convexas, se tiene que f es convexa y continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$.

Así $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^I \nabla(F_j^I)(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^W \nabla(F_j^W)(\mathbf{x}^*)$ y con las condiciones (i) y (ii), se tendría que:

(I') $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = 0$

(II') $\mu_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ para todo $j = 1, \dots, m$.

Aplicando el teorema 5.2 (condiciones KKT a funciones reales), se tiene que $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima de la función real objetivo f bajo las restricciones de (MP2).
Suponiendo que $\mathbf{x}^* \notin X_P^{(III)}$, esto significa que hay un $\overline{\mathbf{x}} \in X$ y $1 \leq k \leq q$ de modo que $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{IW} F_k(\mathbf{x}^*)$, esto implica que $f(x) < f(\mathbf{x}^*)$, lo cual contradice de que f presente un valor óptimo en $\mathbf{x}^*$. En consecuencia, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_P^{(III)}$ del programa matemático MP2) □

Aplicación numérica
Sea la función F multivalor intervalo dada por

$$F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$$

donde sus componentes son funciones de valor intervalo dadas por
$F_1(x_1, x_2) = [x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 3, x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 4]$
$F_2(x_1, x_2) = [2x_1^2 + 4x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 7, 2x_1^2 + 4x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 7]$
Se tiene el siguiente programa matemático (tipo MP2)

$$\begin{array}{ll} min & (F(x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)) \\ \text{sujeto a} & -x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0 \\ & -3x_1 - x_2 + 4 \leqslant 0, \\ & -x_1 - 1 \leqslant 0, \\ & -x_2 + 1 \leqslant 0. \end{array}$$

Entonces tenemos las funciones de valor intervalo, componentes de F

$$F_1^I(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 3$$
$$F_1^W(\mathbf{x}) = 1$$
$$F_2^I(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 7$$
$$F_2^W(\mathbf{x}) = 1$$

y las funciones restricción:

$$g_1(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 + 1, \quad g_2(\mathbf{x}) = -3x_1 - x_2 + 4,$$
$$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 - 1, \quad g_4(\mathbf{x}) = -x_2.$$

Se puede ver que las funciones de valor intervalo asi como las funciones restricción satisfacen las condiciones del Teorema .
Para ver que cumplan las condiciones KKT del teorema se tiene la siguiente expresión:
$\lambda_1^I \begin{bmatrix} 2x_1 + 2 \\ 2x_2 - 2 \end{bmatrix} + \lambda_2^I \begin{bmatrix} 4x_1 + 4 \\ 4x_2 - 4 \end{bmatrix} + \lambda_1^W \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2^W \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$

esto es, se tiene que resolver las siguientes ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} \lambda_1^I(2x_1+2)+\lambda_2^I(4x_1+4)-\mu_1-3\mu_2-\mu_3=0, \\ \lambda_1^I 2x_2-2()+\lambda_2^I(4x_2-4)-\mu_1-\mu_2-\mu_4=0. \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene

$$(x_1^*,x_2^*)=(4/5,8/5)$$

$$\lambda_1^I=1/2; \quad \lambda_2^I=1/4$$

$$\mu_1=\mu_3=\mu_4=0 \ \text{ y } \ \mu_2=6/5$$

Como $\mu_i g_i(\mathbf{x}^*)=\mu_i g_i(9/5,3/5)=0$ para $i=1,\dots,4$. Se concluye que $(x_1^*,x_2^*)=(4/5,8/5)$ es una solución optima Pareto tipo-II.

Teorema 5.7. *Dado el programa matemático (MP2), $x^* \in X$. Considerando que la función multiobjetivo F tiene alguna componente F_j (función valor intervalo) IS-convexa y continuamente gH diferenciable en x^*, para algún $j \in \{1,2,\dots,q\}$. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0<\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\lambda\nabla(F_j^I+F_j^S)(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)=0;$

(II) $\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*)=0$ *para todo* $j=1,\dots,m$.

entonces $\boldsymbol{x}^* \in X_{WP}^{(I)}$ *para el programa matemático (MP2).*

Demostración. Como $F=(F_1,F_2,\dots,F_q))$ es una función multivalor intervalo, esto es $F_j(x)=[F_j^I(x),F_j^S(x)]$ son funciones de valor intervalo, para $j=1,2.\dots,q$.
Considerando que alguna de la funciones componentes F_j, para algún
$j \in \{1,2.\dots,q\}$, es IS-convexa y continuamente gH diferenciable en x^*, condiciones del teorema.
Definiendo la función f por $f(x)=\lambda(F_j^I+F_j^S)(x)$
Como F_j es IS-convexa $\mathbf{x}^*$, por la proposición (4.1) se tiene que F_j^I y F_j^S, son funciones reales convexas, se tiene que f es convexa. Asimismo F_j es continuamente gH-diferenciable $\mathbf{x}^*$, por la proposición 2.9, entonces $(F_j^I+F_j^S)$ es continuamente diferenciable en $\mathbf{x}^*$.
Así $\nabla f(\mathbf{x}^*)=\nabla(F_j^I+F_j^S)(\mathbf{x}^*)$ y con las condiciones (i) y (ii), se tendría que:

(I)' $\nabla f(\mathbf{x}^*)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\nabla g_j(\mathbf{x}^*)=0$

(II)' $\mu_j g_j(\mathbf{x}^*)=0$ para todo $j=1,\dots,m$.

Aplicando el teorema 5.2 (condiciones KKT a funciones reales), se tiene que $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima de la función real f bajo las restricciones del programa (MP2).
Suponiendo que $\mathbf{x}^* \notin X_{WP}^{(I)}$, esto significa que hay un $\overline{\mathbf{x}} \in X$ y $1 \leq k \leq q$ de modo que $F_k(\overline{\mathbf{x}}) \prec_{IS} F_k(\mathbf{x}^*)$, esto implica que $f(x)<f(\mathbf{x}^*)$, lo cual contradice de que f presente un valor óptimo en $\mathbf{x}^*$ En consecuencia, se tiene que $\mathbf{x}^* \in X_{WP}^{(I)}$ □

Teorema 5.8. *Dado el programa matemático (MP2), $x^* \in X$. Considerando que F es continuamente gH-diferenciable e IS-convexa en x^*. Si existen los multiplicadores de Lagrange $0<\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j=1,\dots,q$, y $0 \leqslant \mu_j \in \mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$, de modo que las siguientes condiciones KKT se cumplan:*

(I) $\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\nabla_g(F_j(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)=0;$

(II) $\mu_j g_j(\boldsymbol{x}^*)=0$, *para todo* $j=1,\dots,m$.

entonces $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(I)}$ *y* $\boldsymbol{x}^* \in X_P^{(III)}$ *para el programa matemático (MP2).*

Demostración. Como F es una función multivalor intervalo, esto es
$F=(F_1,F_2,\dots,F_q)$ donde sus componentes F_j son funciones valor intervalo ($j=1,2,\dots,q$). Según consideraciones del teorema, F es continuamente gH-diferenciable en $\mathbf{x}^*$, debido a la definición (2.8), se tiene que (F_j son continuamente gH-diferenciables en $\mathbf{x}^*$ para $j=1,\dots,q$. y por teorema (2.4), los F_j^I y F_j^S son continuamente diferenciables en $\mathbf{x}^*$. De esto, La condición (i) sería equivalente a

$$\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\nabla(F_j^I)(\mathbf{x}^*)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\nabla g_j(\mathbf{x}^*)=0$$
$$=\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\nabla(F_j^S)(\mathbf{x}^*)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$$

de lo cual, sumando se obtiene

$$\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\nabla(F_j^I)(\mathbf{x}^*)+\sum_{j=1}^{q}\lambda_j\nabla(F_j^S)(\mathbf{x}^*)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j'\nabla g_j(\mathbf{x}^*)=0$$

donde se considera $\mu_j'=2\mu_j$, $j=1,2,\dots,m$
A partir de esto se hace una argumentación análoga a la realizada en la demostración del teorema (5.3) y se obtiene el resultado esperado. □

Aplcación Numérica

Sea la función F multivalor intervalo dada por

$$F(x_1,x_2)=(F_1(x_1,x_2),F_2(x_1,x_2))$$

donde sus componentes son funciones de valor intervalo dadas por
$F_1(x_1,x_2)=[x_1^2+2x_1+1,x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2+2]$
$F_2(x_1,x_2)=[x_2^2-2x_2+1,x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2+2]$
Se tiene el siguiente programa matemático (tipo MP2)

$$\begin{aligned} &min && (F(x_1,x_2)=F_1(x_1,x_2),F_2(x_1,x_2)) \\ &\text{sujeto a} && x_1+x_2-1 \leqslant 0 \\ & && -x_1-1 \leqslant 0, \end{aligned}$$

Así se tiene

$$F_1^I(\mathbf{x})=x_1^2+2x_1+1$$
$$F_1^S(\mathbf{x})=x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2+2$$
$$F_2^I(\mathbf{x})=x_2^2-2x_2+1$$

$$F_2^S(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 2$$

y las funciones restricción son

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 1, \quad g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 1$$

Se puede ver que las funciones F_j^I, F_j^I son convexas, $j = 1, 2$. La función multivalor intervalo F es gH-diferenciable. Asimismo, las funciones restricción satisfacen las condiciones del Teorema.
Como el punto $\mathbf{x}^* = (-1, 1)$ satisface las condiciones (i) y (ii) del teorema, en consecuencia $\mathbf{x}^* = (-1, 1) \in X_P^{(I)}$ y $\mathbf{x}^* = (-1, 1) \in X_P^{(III)}$

6. Conclusiones

1. Se desarrollaron metodologías para identificar soluciones óptimas de Pareto del programa matemático (P). Se identificaron tres tipos de soluciones Pareto según la relación de orden parcial establecida sobre $\mathscr{I}$ (conjunto de todos los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$

2. Se establecieron tres tipos de relaciones de orden parcial sobre $\mathscr{I}$, las cuales fueron las denominadas IS, CR, IW. Estas relaciones permitieron realizar las comparaciones entre los vectores con componentes de valor intervalo (elementos de $\mathscr{I}$)

3. En base a la formulación de la gH-derivada se reformularon las condiciones de Karush Khun Tucker para los programas matemáticos cuyas funciones objetivo son funciones multivalor intervalo (funciones cuyos componentes son funciones de valor intervalo)

1. Bao Y., Zao B., Bai E. (2016) Directional diferentiability of interval-valued functions, Journal of Mathematics and Computer Science 16.
2. Bazaraa M., Sherali H., Shetty C. (2006) Nonlinear programming, Theory and Algorithms, Wiley-Interscience, NY.
3. Chalco-Cano Y., Lodwick W., Rufian-Lizana A. (2013) Optimality conditions of type KKT for optimization problem with interval-valued objective function via generalized derivative, Springer Science+Business Media, New York.
4. Hosseinzade E., Hassanpour H. (2011) The Karush Kuhn Tucker Optimality conditions in interval-valued multiobjetive programming problems, J. Appl. Math. Informatics Vol. 29.
5. Ishibuchi H., Tanaka H. (1990) Multiobjective programming in optimization of the interval objective function, European Journal of Operational Research 48.
6. Moore R., Baker R., Cloud M. (2009) Introduction to interval analysis, SIAM.
7. Stefanini L., Bede B. (2009) Generalized Hukuhara Differentiability of Interval-valued Functions and Interval Differential Equations, WP-EMS Working Papers Series in Economics, Mathematics and Statistics, Vol. 3.
8. Stefanini L., Arana M. (2018) Karush-Khun-Tucker conditions for interval and fuzzy optimization in several variables under total and directional generalized differentiability article in press www.elsevier.com.
9. Wu H. (2007) The Karush Khun Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function, European Journal of Operational Research 176, 2007.
10. Wu H. (2009) The Karush Khun Tucker optimality conditions in multiobjective programming problems with interval-valued objective function, European Journal of Operational Research 196, 2009.