

# Ceros de una familia de funciones enteras generadas por la función zeta de Riemann

Manuel Toribio Cangana<sup>†</sup> y Oswaldo Velásquez Castañón<sup>‡</sup>

Facultad de Ciencias.

Universidad Nacional de Ingeniería;

<sup>†</sup>[motoribio@uni.edu.pe](mailto:motoribio@uni.edu.pe)

<sup>‡</sup>[ovelasquez@uni.edu.pe](mailto:ovelasquez@uni.edu.pe)

Recibido el 04 de noviembre del 2020; aceptado el 28 de diciembre del 2020

En este trabajo refrendamos que los ceros no triviales de la función zeta de Riemann están en la banda crítica, y al analizar las sumas parciales de la serie que genera la función zeta, vemos que son funciones casi-periódicas en el sentido de Bohr, así la parte real de la nube de ceros de estas sumas parciales están acotadas y son densas en cada intervalo  $[a_N, b_N]$  donde  $a_N \rightarrow -\infty$  (Montgomery 1983) y  $b_N \rightarrow 1$  (Velásquez Castañón 2009). Calculamos aquí buenas aproximaciones para  $a_N$  y  $b_N$ , y en cada rectángulo con altura significativa, mostramos la distribución de los ceros, y se calcula el número de ellos en esta región con una buena aproximación con respecto a resultados analíticos demostrados por Gonek y Ledoan.

**Palabras Claves:** Función zeta de Riemann. Ceros de funciones enteras. Aplicación del principio del argumento.

In this work, we endorse that the non-trivial zeros of the Riemann zeta function are in the critical band, and when we analyze the partial sums of the serie generated by the zeta function, we see that they are quasi-periodic functions in the Bohr sense, so the real part of the zero cloud of these partial sums is bounded and dense in each interval  $[a_N, b_N]$  where  $a_N \rightarrow -\infty$  (Montgomery 1983) and  $b_N \rightarrow 1$  (Velásquez Castañón 2009). Here we calculate good approximations for  $a_N$  and  $b_N$ , and in each rectangle with significant height we show the distribution of the zeros, and the number of them in this region is calculated with a good approximation with respect to the analytical results demonstrated by Gonek and Ledoan.

**Keywords:** Riemann zeta function. Zeros of integer functions. Application of the principle of the argument.

## 1. Introducción

El objeto de estudio de esta investigación es la *función zeta de Riemann*, función de variable compleja definida como la prolongación analítica a todo el plano complejo de

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}; \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1 \quad (1)$$

como una función meromorfa con un único polo simple en 1 y residuo también 1. Una relación trascendente de esta función es

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \quad (2)$$

conocida como la *ecuación funcional* de la función zeta de Riemann, y el resultado de Euler ( $s \in \mathbb{R}$ ) generalizado por Riemann.

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad \Re(s) > 1 \quad (3)$$

donde  $p$  recorre el conjunto de los primos positivos. A partir de la ecuación (3) se sabe que esta función no tiene ceros en  $\Re(s) > 1$ . Para  $\Re(s) < 0$ , el teorema de reflexión de Schwarz garantiza que la función  $\Gamma$  no tiene ceros en todo el plano complejo, y como  $\zeta(1-s) \neq 0$  se tiene que  $s$  es un cero de  $\zeta$  en este semiplano si y solo si  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$ , obteniendo así, los ceros triviales de la

función zeta de Riemann  $-2, -4, -6, -8, -10, \dots$ . También de (2), vemos que los posibles ceros de la función  $\zeta$  en la *banda crítica*  $0 \leq \Re(s) \leq 1$  guardan una simetría respecto a la *recta crítica*  $\Re(s) = 1/2$ , se sabe además que para todo  $t$  real  $\zeta(1+it) \neq 0$ , en este contexto, se genera la famosa conjetura de Riemann.

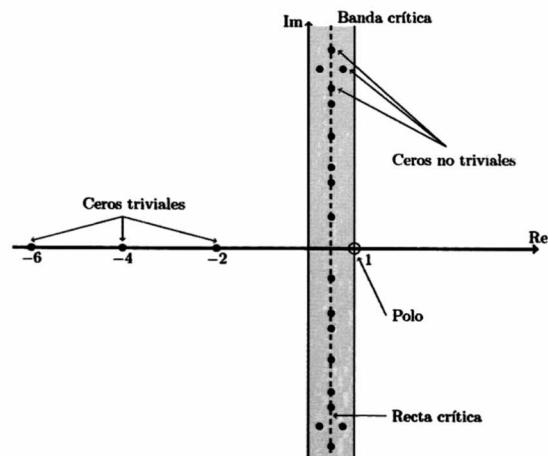


Figura 1. La banda crítica de la función zeta

“Los ceros no triviales de la función zeta están en la recta crítica  $\Re(s) = 1/2$ ”

Con la tecnología de nuestros días en abril del 2020 David J. Platt de la universidad de Bristol (Inglaterra) y

Timothy S. Trudgian (Australia) [1] han demostrado que la hipótesis de Riemann es verdadera hasta una altura de  $3 \times 10^{12}$ , esto es, si

$$\zeta(\sigma + it) = 0 \text{ y } 0 < t < 3 \times 10^{12}, \text{ entonces } \sigma = 1/2$$

Sobre la cantidad de ceros hasta una altura prefijada, en julio del 2021 E. Hasanalizade, Q. Shen y P. Jie Wong [2] han estimado que la cantidad de ceros no triviales de la función zeta de Riemann  $N(T)$  en la banda crítica de altura  $T$ , satisface la siguiente estimativa

$$\left| N(T) - \frac{T}{2\pi} \log \left( \frac{T}{2\pi e} \right) \right| \leq a \log T + b \log \log T + c$$

para  $a = 0,1038$ ,  $b = 0,2573$  y  $c = 9,3675$

## 2. Consideraciones teóricas

### 2.1. Sobre los ceros de $\zeta_N(s)$

En este trabajo se hace un estudio de esta función  $\zeta$ , a partir de la información que nos brinda las sumas parciales  $\zeta_N(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s}$ . Veremos que los ceros de esta familia de funciones están ubicados en bandas verticales de ancho finito.

Sobre la búsqueda de los ceros de  $\zeta_N$  en el semiplano  $\Re(s) > 1$ , se sabe que en 1948 Paul Turán demostró que  $\zeta_N$  no tiene ceros en  $\Re(s) > 1$  para  $N = 1, 2, 3, 4$  y  $5$  [3], en 1966 Robert Spira demostró que  $\zeta_N$  no tiene ceros en  $\Re(s) > 1$  para  $N = 6, 7, 8$  y  $9$  [4], dos años más tarde el mismo R. Spira demuestra que  $\zeta_N$  si tiene ceros en el semiplano  $\Re(s) > 1$  para  $N = 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, \dots, 49$  y  $50$ , en 1980 W.R. Monach demuestra que  $\zeta_N(s) = 0$  si tiene solución en  $\Re(s) > 1$  para  $N \geq 51$  [5]. Cerrando este enfoque en el año 2016 D.J. Platt y T.S. Trudgian [6] demuestran que para

$$1 \leq N \leq 18; N = 20, 21, 28 \quad (4)$$

no hay ceros de  $\zeta_N$  en el semiplano  $\Re(s) > 1$ , mientras que para los demás enteros positivos  $N$ , si existen infinitos ceros en esta región, los ceros especiales.

Sea

$$b_N = \sup \{ \Re(s) : \zeta_N(s) = 0 \} \quad (5)$$

Si  $s = \sigma + it$  con  $\sigma > 1$  y  $\zeta_N(s) = 0$  entonces

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{N^s} = 0$$

$$1 = \left| \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{N^s} \right| \leq \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} + \dots + \frac{1}{N^\sigma} < \zeta(\sigma) - 1$$

de donde  $2 < \zeta(\sigma)$ . Siendo  $\zeta$  decreciente en el intervalo  $(1; +\infty)$  y  $\zeta(1,72865) = 2$ , concluimos que  $b_N \leq 1,73$

En 1983 H.L. Montgomery [7] demuestra que si  $0 < c < (\frac{4}{\pi} - 1)$ ,  $\exists N_0(c)/N > N_0(c)$ ,  $\zeta_N$  tiene ceros en  $\sigma > 1 + c \frac{\log(\log N)}{\log N}$ , luego en el 2001 H.L. Montgomery y R. C. Vaughan [8] demuestran que existe  $N_0/N > N_0$ ,  $\zeta_N$  no tiene ceros en  $\sigma \geq 1 + (\frac{4}{\pi} - 1) \frac{\log(\log N)}{\log N}$ . Así

$$1 + c \frac{\log(\log N)}{\log N} < b_N \leq 1 + \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) \frac{\log(\log N)}{\log N}$$

de donde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_N = 1$$

Sea ahora

$$a_N = \inf \{ \Re(s) : \zeta_N(s) = 0 \} \quad (6)$$

En el 2009 M. Balazard y Oswaldo Velásquez [9] demuestran que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N}{N} = -\log(2)$ , de donde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = -\infty$$

de esta forma todos los ceros de  $\zeta_N$  están en la franja vertical  $[a_N; b_N] \times \mathbb{R}$ .

En el trabajo de G. Mora 2013 [10] se ve que el conjunto  $\{ \Re(s) : \zeta_N(s) = 0 \}$  es eventualmente denso en  $[a_N; b_N]$ , es decir  $\exists N_0/N \geq N_0$

$$\overline{\{ \Re(s) : \zeta_N(s) = 0 \}} = [a_N; b_N] \quad (7)$$

Si  $n_N(T)$  denota la cantidad de ceros de  $\zeta_N(s)$  en el rectángulo  $[a_N; b_N] \times [0; T]$ . Una estimativa que aparece en los trabajos de S.M. Gonek y A.H. Ledoan [11] es

$$\left| n_N(T) - \frac{T}{2\pi} \log(N) \right| < \frac{N}{2}$$

Por ejemplo para  $T \in \left[ \frac{2k\pi}{\log 2}, \frac{(2k+1)\pi}{\log 2} \right)$ ,  $n_2(T) = k$  ya que los ceros  $z_k$  de altura  $\leq T$  de  $\zeta_2$  son

$$z_0 = \frac{\pi i}{\log(2)}, z_1 = \frac{3\pi i}{\log(2)}, \dots, z_{k-1} = \frac{(2k-1)\pi i}{\log(2)}$$

Más aún, en mayo del 2014 G. Mora y J.M. Sepulcre [12] demostraron que, para cada entero  $N \geq 2$  existe  $T > 0$  tal que

$$n_N(T) = \left\lceil \frac{T \log(N)}{2\pi} \right\rceil$$

### 2.2. Proyección sobre un convexo

En el siguiente resultado  $H$  será un espacio vectorial con un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  que es completo con respecto a la norma inducida  $\| \cdot \|_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ , es decir,  $H$  denotará un espacio de Hilbert.

**Teorema 1** (Theorem 5.2. [13]). Sea  $K \subset H$  un conjunto no vacío cerrado y convexo. Entonces para todo  $w \in H$ , existe un único  $u \in K$  tal que

$$|w - u| = \min_{v \in K} |w - v| = \text{dist}(w, K). \quad (8)$$

Además,  $u$  está caracterizado por la propiedad

$$u \in K \text{ y } \langle w - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \quad (9)$$

El elemento  $u$  dado en este teorema es llamado la proyección de  $w$  sobre  $K$  y es denotado por

$$u := \text{Proy}_K w$$

la desigualdad (9) dice que el producto escalar del vector  $\vec{uw}$  con el vector  $\vec{vb}$  ( $v \in K$ ) es  $\leq 0$ , es decir, el ángulo  $\theta$  determinado por esos dos vectores es  $\geq \pi/2$ .

### 2.3. Error en la interpolación polinomial

Denotaremos por  $\mathcal{P}_n$  al conjunto de todas las funciones polinomiales  $P$  con coeficientes reales o complejos de grado  $\leq n$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

**Teorema 2** ( Theorem 2.1.1.1, [14]). Dados  $n+1$  puntos arbitrarios

$$(x_i, f_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j,$$

existe un único polinomio  $P \in \mathcal{P}_n$  tal que

$$P(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

En la página 39 de [14] se demuestra que tal polinomio viene dado por

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad (10)$$

llamado *polinomio de interpolación de Lagrange*. Para obtener el polinomio de interpolación completo se puede resolver el problema para subconjuntos del conjunto de puntos dado, y llegar al caso general recursivamente. En efecto, dado un conjunto de puntos  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  denotaremos por  $P_{i_0 i_1 \dots i_k}$  al polinomio en  $\mathcal{P}_k$  tal que:

$$\begin{aligned} P_i(x) &\equiv f_i, & i &= 0, 1, 2, \dots, n \\ P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x_{i_j}) &= f_{i_j}, & j &= 0, 1, \dots, k \quad (k \geq 1) \end{aligned} \quad (11)$$

**Proposición 1.** Estos polinomios están relacionados por la siguiente fórmula recursiva

$$P_{i_0 i_1 \dots i_k}(x) \equiv \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}} \quad (12)$$

*Demostración.* Denotando el lado derecho de (12) por  $R(x)$ , demostraremos que  $R$  tiene las propiedades características de  $P_{i_0 i_1 \dots i_k}$ . El grado de  $R$  es claramente menor o igual que  $k$ . Por las definiciones de  $P_{i_1 i_2 \dots i_k}$  y  $P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}$ ,

$$R(x_{i_0}) = P_{i_0 i_1 \dots i_{k-1}}(x_{i_0}) = f_{i_0},$$

$$R(x_{i_k}) = P_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_k}) = f_{i_k},$$

y

$$R(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})f_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k})f_{i_k}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = f_{i_j}$$

para  $j = 1, 2, \dots, k-1$ . Así  $R = P_{i_0 i_1 \dots i_k}$ , en vista de la unicidad de la interpolación polinomial dado en el teorema 2.  $\square$

	k=0	1	2	3
$x_0$	$f_0 \equiv P_0(x)$	$P_{01}(x)$		
$x_1$	$f_1 \equiv P_1(x)$		$P_{012}(x)$	
$x_2$	$f_2 \equiv P_2(x)$	$P_{12}(x)$		$P_{123}(x)$
$x_3$	$f_3 \equiv P_3(x)$	$P_{23}(x)$		

**Tabla 1.** El proceso recursivo

Las dos primeras columnas del cuadro contienen las coordenadas de los puntos dados  $(x_i, f_i)$  (en este caso  $0 \leq i \leq 3$ ). Las columnas subsiguientes se llenan mediante el cálculo de cada entrada de forma recursiva desde sus dos “vecinos” en la columna anterior, según la ecuación (12). Fijando ideas

$$P_{0123}(x) \equiv \frac{(x - x_0)P_{123}(x) - (x - x_3)P_{012}(x)}{x_3 - x_0}$$

**Ejemplo 1.** Para dos puntos  $(x_0, f_0)$  y  $(x_1, f_1)$

$$P_0(x) \equiv f_0, \quad P_1(x) \equiv f_1$$

y

$$\begin{aligned} P(x) \equiv P_{01}(x) &= \frac{(x - x_0)f_1 - (x - x_1)f_0}{x_1 - x_0} \\ &= f_0 + \left( \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right) (x - x_0) \end{aligned}$$

Ahora, dada una función  $f$  y algunos de sus valores

$$f_i := f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

surge la siguiente interrogante: ¿Qué tan buena será la interpolación polinomial  $P(x) \equiv P_{01\dots n}(x) \in \mathcal{P}_n$  para reproducir los valores de  $f(x)$  cuando  $x \neq x_i$ ? En el siguiente resultado veremos que bajo ciertas condiciones, será posible acotar este error  $f(x) - P(x)$

**Teorema 3** (Theorem 2.1.4.1, [14]). Si la función  $f$  es derivable  $(n+1)$  veces, entonces para todo  $\bar{x}$  existe  $\xi$  en el menor intervalo  $I[x_0, \dots, x_n, \bar{x}]$  que contiene a  $\bar{x}$  y todas las abscisas  $x_i$ , satisfaciendo

$$f(\bar{x}) - P_{01\dots n}(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n) \quad (13)$$

En particular, cuando  $n = 1$

$$f(\bar{x}) - P_{01}(\bar{x}) = \frac{f''(\xi)}{2} (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \quad (14)$$

### 3. Cuestiones metodológicas

Determinaremos ahora los ceros de una función holomórfica  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  en una región acotada, utilizando un método de bisección en el plano para aislar cada cero, y luego determinarlo usando el método de Newton. Por el

principio del argumento, si  $\partial R \subset \Omega$  es una curva cerrada, simple, poligonal, parametrizada en sentido antihorario, el número de ceros de  $f$  dentro de  $R$ ,  $N(R)$  está dado por

$$N(R) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial R} \arg f(s).$$

y la función argumento  $\arg : \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\arg(z) = 2 \arctan \left( \frac{\Im(z)}{|z| + \Re(z)} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$$

Si  $s_1, s_2$  son dos números complejos verificando que  $|\Delta_{[s_1, s_2]} \arg f(s)| < \pi$ , podemos calcular la variación del argumento como

$$\Delta_{[s_1, s_2]} \arg f(s) = \arg \left( \frac{f(s_2)}{f(s_1)} \right).$$

Suponiendo que  $\partial R = \bigcup_{i=1}^n [z_i, z_{i+1}]$  donde  $z_{n+1} = z_1$ , y para  $i = 1, \dots, n$ , la variación del argumento es  $|\Delta_{[z_i, z_{i+1}]} \arg f(s)| < \pi$ , se tiene que

$$N(R) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \Delta_{[z_i, z_{i+1}]} \arg f(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \arg \left( \frac{f(z_{i+1})}{f(z_i)} \right).$$

Dada una curva cerrada, simple arbitraria  $\mathcal{C} \subset \Omega$ , nuestro primer paso será discretizarla “adecuadamente” como una poligonal  $R$ , es decir, encontrar una partición para la cual se cumpla que la variación del argumento sobre cada segmento de extremos  $z_i, z_{i+1}$  sea menor que  $\pi$ . Luego evaluaremos la variación del argumento a lo largo del segmento  $[z_i, z_{i+1}]$  y cuando éste resulte ser mayor a  $\pi$ , elegiremos un punto interior en  $[z_i, z_{i+1}]$ , por ejemplo el punto medio y calcularemos nuevamente la variación del argumento para cada segmento. En caso falle, repetiremos este proceso hasta que la variación del argumento sobre cada segmento sea menor que  $\pi$ . El criterio dado en el teorema 2.1 [15] nos permitirá determinar adecuadamente los puntos  $z_i$  sobre la frontera  $\partial R$ , para calcular la variación del argumento de  $f$  sobre  $\partial R$ .

Aquí,  $\langle x, y \rangle = \Re(x\bar{y})$  es el producto escalar usual o euclíadiano sobre  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 4 (Ying and Katz).** Sea  $P(s)$  una función afín compleja cuya imagen no contiene al cero,  $f(s)$  una función holomorfa sobre el intervalo  $[s_1, s_2]$  y  $R(s)$  dada por  $R(s) = f(s) - P(s)$ . Si

$$\min_{s \in [s_1, s_2]} |P(s)| > \max_{s \in [s_1, s_2]} |R(s)|, \quad (15)$$

entonces

$$|\Delta_{[s_1, s_2]} \arg f(s)| < \pi \quad \text{y} \quad \Delta_{[s_1, s_2]} \arg f(s) = \arg \left( \frac{f(s_2)}{f(s_1)} \right).$$

Más precisamente, si  $s_0 \in [s_1, s_2]$  es tal que  $P(s_0) = \min_{s \in [s_1, s_2]} |P(s)| > 0$ , para todo  $s \in [s_1, s_2]$

$$\langle f(s), P(s_0) \rangle > 0.$$

*Demostración.* Como  $P([s_1, s_2])$  es un conjunto convexo que no contiene al cero, sea  $P(s_0)$  la proyección del 0 sobre este conjunto, por una caracterización geométrica clásica de este punto, dada en el teorema 1, para todo  $s \in [s_1, s_2]$

$$\langle P(s) - P(s_0), 0 - P(s_0) \rangle \leq 0,$$

o bien  $\langle P(s), P(s_0) \rangle \geq |P(s_0)|^2$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \langle f(s), P(s_0) \rangle &= \langle P(s) + R(s), P(s_0) \rangle \\ &= \langle P(s), P(s_0) \rangle + \langle R(s), P(s_0) \rangle \\ &\geq |P(s_0)|^2 - |R(s)| \cdot |P(s_0)| \\ &\geq \left( \min_{s \in [s_1, s_2]} |P(s)| - \max_{s \in [s_1, s_2]} |R(s)| \right) |P(s_0)| > 0 \end{aligned}$$

□

También corroboramos, de modo distinto el resultado de Lema 2.1 de [15], como consecuencia de la fórmula del resto de Taylor en una variable.

**Lema 1.** Sea  $f(s)$  una función holomorfa sobre el intervalo  $[s_1, s_2]$ ,  $P(s)$  y  $R(s)$  dados por

$$P(s) = f(s_1) + \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1} (s - s_1)$$

y  $R(s) = f(s) - P(s)$ . Si  $M(s_1, s_2)$  es tal que para todo  $s \in [s_1, s_2]$ ,

$$|f''(s)| \leq M(s_1, s_2),$$

entonces

$$\max_{s \in [s_1, s_2]} |R(s)| \leq M(s_1, s_2) \frac{|s_1 - s_2|^2}{8}.$$

*Demostración.* En una variable esto podría ser una sencilla aplicación de la fórmula de interpolación de Lagrange, pero en variable compleja esto requiere de un retoque. En efecto, sea  $u \in \mathbb{C}$  con  $|u| = 1$  fijo arbitrario, y definimos  $f_u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f_u(t) = \langle f(z_1 + t(z_2 - z_1)), u \rangle.$$

También definimos la interpolación (lineal) polinomial  $P_u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$P_u(0) = f_u(0) = \langle f(z_1), u \rangle, \quad P_u(1) = f_u(1) = \langle f(z_2), u \rangle,$$

así que

$$\begin{aligned} P_u(t) &= P_u(0) + t(P_u(1) - P_u(0)) \\ &= \langle f(z_1) + t(f(z_2) - f(z_1)), u \rangle \\ &= \langle P(z_1 + t(z_2 - z_1)), u \rangle. \end{aligned}$$

La fórmula del error en la interpolación polinomial (Theorem 2.1.4.1, p. 49, [14]), para  $n = 1$ , nos dá, la existencia, para cada  $t \in ]0, 1[$ , de  $\xi \in ]0, 1[$  tal que

$$f_u(t) - P_u(t) = \frac{f_u''(\xi)}{2!} t(t-1),$$

que se transforma en

$$\langle R(t), u \rangle = \frac{\langle f''(z_1 + \xi(z_2 - z_1))(z_2 - z_1)^2, u \rangle}{2} t(t-1).$$

Usando la cota  $M(z_1, z_2)$  para  $f''(s)$  en  $[s_1, s_2]$ , y teniendo en cuenta que  $0 \leq t(1-t) \leq 1/4$  para todo  $t \in [0, 1]$  obtenemos

$$|\langle R(t), u \rangle| \leq \frac{1}{8} M(z_1, z_2) |z_2 - z_1|^2.$$

Finalmente, para  $t \in [0, 1]$  es suficiente elegir  $u$  tal que  $\langle R(t), u \rangle = |R(t)|$  y reescribir la desigualdad anterior  $\square$

Este lema nos ayudará reemplazar el cálculo del máximo de  $|R(s)|$  por un cálculo más simple, a partir de alguna cota de  $|f''(s)|$  en el intervalo  $[s_1, s_2]$ . De otro lado, por ser  $P$  una función afín lineal  $P([z_1, z_2]) = [P(z_1), P(z_2)]$ , y para cualquier  $t \in [0, 1]$

$$P(z_1 + t(z_2 - z_1)) = P(z_1) + t(P(z_2) - P(z_1))$$

En el siguiente lema, usando los mismos argumentos del Lema 2.2 de [15], demostraremos que

$$\min_{z \in [z_1, z_2]} |P(z)| \in \left\{ \frac{\Im(P(z_1) \overline{P(z_2)})}{|P(z_1) - P(z_2)|}, |P(z_1)|, |P(z_2)| \right\} \quad (16)$$

**Lema 2.** Sea  $a, b \in \mathbb{C}$  con  $a \neq b$  y  $m = \min_{t \in [0, 1]} |a + t(b - a)|$

1. Si  $\Re(a\bar{b}) \geq |a|^2$  y  $|b| > |a|$ , entonces  $m = |a|$ .
2. Si  $\Re(a\bar{b}) \geq |b|^2$  y  $|a| > |b|$ , entonces  $m = |b|$ .
3. En cualquier otro caso,

$$m = \frac{|\Im(a\bar{b})|}{|b - a|}$$

*Demostración.* Sea  $t^* \in \mathbb{R}$  tal que

$$\min_{t \in \mathbb{R}} |a + t(b - a)| = a + t^*(b - a),$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle b - a, a + t^*(b - a) \rangle = \langle b, a \rangle - |a|^2 + t^*|b - a|^2 \\ &= \Re(a\bar{b}) - |a|^2 + t^*|b - a|^2 \end{aligned}$$

de donde

$$t^* = \frac{|a|^2 - \Re(a\bar{b})}{|b - a|^2}$$

**Caso 1.**  $\Re(a\bar{b}) \geq \min\{|a|^2, |b|^2\}$

- Si  $\Re(a\bar{b}) \geq |a|^2$  y  $|b| \geq |a|$ , entonces  $t^* \leq 0$ , de donde  $t^* = 0$  y  $\min_{t \in [0, 1]} |a + t(b - a)| = |a|$ .

- Si  $\Re(a\bar{b}) \geq |b|^2$  y  $|a| \geq |b|$ , entonces  $t^* = \frac{|a|^2 - \Re(a\bar{b})}{|b - a|^2} = \frac{|a|^2 - \langle a, b \rangle}{|b - a|^2} \geq 1$ , puesto que  $\langle a, b \rangle \geq |b|^2 \Leftrightarrow |a|^2 + \langle a, b \rangle \geq |a|^2 + |b|^2$   $\Leftrightarrow |a|^2 - \langle a, b \rangle \geq |a|^2 + |b|^2 - 2\langle a, b \rangle = |b - a|^2$  de donde  $t^* = 1$  y  $\min_{t \in [0, 1]} |a + t(b - a)| = |b|$ .

**Caso 2.**  $\Re(a\bar{b}) < \min\{|a|^2, |b|^2\}$ , por tanto  $t^* \in (0, 1)$  y

$$\begin{aligned} |a + t^*(b - a)| &= |a\bar{b} - |a|^2 + t^*|b - a|^2| \\ &= |a\bar{b} - \Re(a\bar{b})| = |i\Im(a\bar{b})| \end{aligned}$$

Así

$$\min_{t \in [0, 1]} |a + t(b - a)| = \frac{|\Im(a\bar{b})|}{|b - a|}$$

$\square$

Con estas herramientas a la mano, nuestro criterio de discretización para una curva cerrada simple  $\mathcal{C}$  será dividir este contorno, en un contorno poligonal de segmentos  $[s'_1, s'_2]$  tales que

$$\min_{s \in [s'_1, s'_2]} |P(s)| > M(s'_1, s'_2) \frac{|s'_1 - s'_2|^2}{8}.$$

Esto, junto con el Lema 1, da la condición del Teorema 4 para  $f(s)$  sobre el intervalo  $[s'_1, s'_2]$ .

Necesitamos ahora calcular una cota superior para la segunda derivada de cada uno de las funciones que aquí investigamos, esto es, funciones de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k z}; \quad z \in [z_1, z_2], \quad \lambda_k < 0$$

Como  $f''(z) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k z}$ , entonces

$$|f''(z)| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \lambda_k^2 e^{\Re(\lambda_k z)} \text{ para } z \in [z_1, z_2],$$

esto es  $z = (1-t)z_1 + tz_2$  con  $0 \leq t \leq 1$ , de donde

$$\begin{aligned} \Re(\lambda_k z) &\leq \max_{z \in [z_1, z_2]} \Re(\lambda_k z) \\ &= \max_{t \in [0, 1]} \{(1-t)\lambda_k \Re(z_1) + t\lambda_k \Re(z_2)\} \\ &\leq \lambda_k \min\{\Re(z_1), \Re(z_2)\} \end{aligned}$$

entonces

$$|f''(z)| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \lambda_k^2 e^{\lambda_k \min\{\Re(z_1), \Re(z_2)\}}, \quad z \in [z_1, z_2]$$

es decir,  $|f''(z)| \leq M(z_1, z_2)$  para

$$M(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^n |a_k| \lambda_k^2 e^{\lambda_k \min\{\Re(z_1), \Re(z_2)\}} \quad (17)$$

En particular, para

$$\zeta_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z} = \sum_{k=1}^n e^{-\log(k)z}$$

$$M(z_1, z_2) = \sum_{k=2}^n [\log(k)]^2 e^{-\log(k) \min\{\Re(z_1), \Re(z_2)\}} \quad (18)$$

## 4. Resultados

Para cada altura  $T$ , de acuerdo a las técnicas utilizadas en el procesamiento de los datos, denotando con  $n_N(T)$  al número de ceros de  $\zeta_N$  en el rectángulo  $[a_N(T), b_N(T)] \times [0, T]$ , es decir

$$n_N(T) = |\{s \in \mathbb{C} / \zeta_N(s) = 0, 0 < \Im(s) < T\}|$$

y los términos  $a_N(T), b_N(T)$  por

$$a_N(T) = \inf \{ \Re(s) / \zeta_N(s) = 0, 0 < \Im(s) < T \} \quad (19)$$

y

$$b_N(T) = \sup \{ \Re(s) / \zeta_N(s) = 0, 0 < \Im(s) < T \} \quad (20)$$

El resultado presentado en la siguiente figura ha sido generado usando un código escrito en Python 3, mientras que la gráfica de la nube de ceros ha sido generado usando gnuplot en formato eps. Para poder mantener una buena precisión en los valores procesados, se decidió usar la librería Mpmath [16], la cual permite realizar cálculos con números reales y complejos manteniendo una alta precisión (10 dígitos o 1000 dígitos), por ejemplo aquí se usó una precisión de 100 dígitos significativos en el entorno de Mpmath.

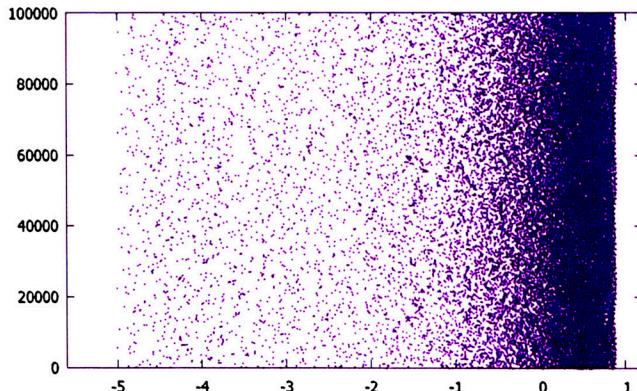


Figura 2. Nube de ceros de  $\zeta_9(s)$

En el siguiente cuadro se muestra los resultados obtenidos en esta investigación para los distintos valores de  $N$  y con cierta altura prefijada.

$N$	$T$	$n_N(T)$	$\frac{T}{2\pi} \log(N)$	$a_N(T)$	$b_N(T)$
3	$10^6$	174850	174849.576	-0.999999	0.787884
4	$10^6$	220636	220635.600	-1.214285	0.626288
5	$10^6$	256150	256149.999	-2.425976	0.890899
6	$10^6$	285168	285167.376	-2.886476	0.841088
7	$10^5$	30970	30970.122	-3.802603	0.975899
8	$10^5$	33095	33095.340	-4.378860	0.919274
9	$10^5$	34970	34969.915	-5.009246	0.893349

Tabla 2. Recopilación de los datos procesados

Por ejemplo, para la función  $\zeta_9(s)$  vemos que la región de estudio es  $[-5,009; 0,893] \times [0; 100000]$ , y en ella hay 34 970 ceros, que están bien aproximados por  $\frac{10^5}{2\pi} \log(9) = 34969,915$ .

## 5. Conclusiones

- El clásico problema de Rieman es aún una gran fuente de inspiración para seguir generando mejoras, y quizá nuevos resultados.
- Sobre los ceros de las funciones enteras  $\zeta_N$ , tenemos el legado que nos dejan: Turan, Spira, Monach, Montgomery, Vaughan, Balazard, Oswaldo Velásquez, Mora, Gonek, Ledoan, Sepulcre, Platt, Trudgian, etc.
- Este trabajo está basada en los resultados de X. Ying y I.N. Katz, cuyas demostraciones fueron aquí mejoradas usando las herramientas del análisis convexo y análisis numérico.
- Para la implementación numérica se ha usado Python 3, logrando generar una data efectiva de ceros de  $\zeta_N$ , cuyo análisis corrobora resultados analíticos de nuestros predecesores, y seguirán siendo explorados con la confianza de descifrar la matemática que allí existe.

## Agradecimiento

Nuestro agradecimiento al Instituto de Investigación de la Facultad de Ciencias de la UNI, por su apoyo con esta publicación.

1. Platt, David J and Trudgian, Timothy S, LMS Journal of Computation and Mathematics, 19, 1, 37–41, 2016, London Mathematical Society.
2. Elchin Hasanalizade and Quanli Shen and Peng-Jie Wong, Journal of Number Theory, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2021.06.032>, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X2100233X>.
3. Turán, Paul, 24, 17, 1948, I kommission hos Munksgaard.
4. Spira, Robert, Mathematics of Computation, 20, 96, 542–550, 1966, JSTOR.
5. Numerical investigation of several problems in number theory, Univ. of Michigan Ph. D Dissertation, William Reynolds, Ann Arbor, 1980.
6. Platt, David J and Trudgian, Timothy S, LMS Journal of Computation and Mathematics, 19, 1, 37–41, 2016, London Mathematical Society.
7. Montgomery, Hugh L, Studies in pure mathematics, 497–506, 1983, Springer.
8. Montgomery, Hugh L and Vaughan, Robert C, Periodica Mathematica Hungarica, 43, 1-2, 199–214, 2002, Springer.

9. Balazard, Michel and Castaño, Oswaldo Velásquez, *Comptes Rendus Mathematique*, 347, 7-8, 343–346, 2009, Elsevier
10. Mora, Gaspar, arXiv preprint arXiv:1311.5171, 2013
11. Gonek, Steven M and Ledoan, Andrew H, *International Mathematics Research Notices*, 2010, 10, 1775–1791, 2010, OUP.
12. Mora, Gaspar and Sepulcre, Juan Matias, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (1923-), 194, 5, 1499–1504, 2015, Springer.
13. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Brezis, Haim, 2010, Springer Science & Business Media.
14. Introduction to numerical analysis, Stoer, Josef and Bulirsch, Roland, 12, 2013, Springer Science & Business Media.
15. Ying, Xingren and Katz, I Norman, *Numerische Mathematik*, 53, 1-2, 143–163, 1988, Springer.
16. Fredrik Johansson and others, mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 0.18), <http://mpmath.org/>, December, 2013.