Validez de la formulación variacional y existencia de solución débil

Héctor Guimaray Huerta, Eladio Ocaña Anaya
IMCA, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería;
hguimaray@uni.edu.pe, eocana@imca.uni.edu.pe

Recibido el 27 de Marzo de 2020; aceptado el 17 de Junio de 2020

Estudiaremos algunas condiciones para garantizar la validez tanto de las formulaciones variacionales como de las funcionales asociadas a algunas ecuaciones diferenciales parciales. Asimismo, estudiaremos la existencia de solución de algunas ecuaciones particulares formuladas.

Palabras Claves: Formulación variacional, Soución débil.

We will study some conditions ensuring the validity of the variational formulations as well as the corresponding functional associated to some partial differential equations. We will also study the existence of solution of some particular variational formulations.

Keywords: Variational formulation, Weak solution.

1 Introducción

Sean X e Y dos espacios vectoriales normados, denotamos por $\mathcal{L}(X,Y)$ al espacio lineal

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{\Phi : \Phi : X \to Y \text{ es lineal}\}.$$

Se dice que $f : A \subseteq X \to Y$ es **Fréchet diferenciable** [1] en $a \in A$ si existe $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ continua tal que

$$\lim_{x\to 0,\, x\in\mathcal{F}} \frac{f(a+x) - f(a) - L(x)}{\|x\|} = 0,$$

donde $\mathcal{F} = \{x \in X : a + x \in A\}$. L es llamada la derivada de Fréchet de f en a y será denotada por $Df(a)$.

La función f es **Gateaux diferenciable** [2] en $a \in A$ si existe $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ continua tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - tL(v)}{t} = 0, \ \forall v \in X \text{ con } a+tv \in A.$$

L es llamada la **derivada de Gateaux** de f en a y será denotada por $f'(a)$.

La derivada direccional de f en el punto a y en la dirección v, es el límite (si existe)

$$D_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

En general se cumple $D_v f(a) = f'(a)v$.

La formulación variacional de una ecuación diferencial parcial se obtiene a partir de una reformulación integral de tal ecuación con el uso de ciertos tipos de funciones llamadas funciones test que serán las funciones que forman el conjunto $C^\infty(\Omega)$ ó $C_0^\infty(\Omega)$ [3],

$$C_0^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \Omega \supset \text{supp}\,(f) \text{ es compacto}\},$$

donde $\text{supp}\,(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$, siendo Ω abierto de $\mathbb{R}^n$.

Para $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definimos el **Espacio de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ [4] como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha u =: g_\alpha$ es la **derivada parcial débil** de u, esto es, la función g_α que satisface

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Un caso especial de espacio de Sobolev es el espacio $H^m(\Omega)$ y más aún, el espacio $H^1(\Omega)$, definido por:

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

Teorema 1.1 (Fórmula de Green [5]). *Sean $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces*

$$\int_\Omega f \triangle g dx = -\int_\Omega \nabla f \nabla g dx + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds,$$

donde $\frac{\partial g}{\partial \eta} = \nabla g.\eta$

Definición 1.1 (Condición Palais–Smale [6],[1]). *Sean X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Se dice que Φ satisface la condición* **Palais–Smale (PS)** *si toda sucesión $\{x_k\}$ en X satisfaciendo las condiciones:*

$$\begin{cases} \{\Phi(x_k)\} \text{ acotada, y} \\ \Phi'(x_k) \to 0, \end{cases} \tag{1}$$

admite una subsucesión convergente.

1.1 La ecuación de Laplace–Dirichlet [7]

La ecuación de Laplace con condición de frontera de Dirichlet viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sobre } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{LD}$$

Una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface (LD) es llamada solución fuerte de la ecuación.

1.1.1 Formulación variacional de la ecuación (LD)

De la primera ecuación del sistema (LD), tenemos

$$\varphi \Delta u = 0, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \varphi \, \Delta \, u \\ &= -\int_\Omega \nabla\varphi\nabla u + \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \quad \text{(fórmula de Green)} \\ &= -\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Así, de la expresión (1) tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = 0, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2}$$

Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (2) es llamada **solución débil** de la ecuación (LD).

1.1.2 La funcional de energía correspondiente a la ecuación (LD)

Asociada a la ecuación variacional (2), la funcional de energía correspondiente a la ecuación (LD) es la función $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3}$$

1.2 La ecuación de Poisson–Dirichlet [8]

La ecuación de Poisson con condición de frontera de Dirichlet (PD) viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{sobre } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{PD}$$

para ciertas funciones f y g. Similar al caso anterior, una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface (PD) es llamada solución fuerte.

1.2.1 Formulación variacional de la ecuación (PD)

De la primera ecuación del sistema (PD), tenemos

$$-\Delta u \varphi = f(x, u)\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,u)\varphi &= \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \\ &= -\int_\Omega \varphi \Delta u \\ &= \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \text{ (Green)} \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5}$$

Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (5) es llamada **solución débil** de la ecuación (PD).

1.2.2 La funcional de energía correspondiente a la ecuación (PD)

Asociada a la ecuación (5), consideremos la función $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi = \psi - \phi, \tag{6}$$

donde ψ es la función definida en (3) y ϕ es la función definida en $H_0^1(\Omega)$ por

$$\phi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx, \text{ donde } F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds. \tag{7}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - F(x,u)\right]. \end{aligned}$$

Teorema 1.2 ([9]). *Sean X un espacio de Banach, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1 e inferiormente acotada. Si Φ satisface la condición PS, entonces esta alcanza su mínimo global.*

2 Validez de formulaciones variacionales y funcionales correspondientes

Proposición 2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) abierto y acotado (con condición de regularidad sobre el borde $\partial\Omega$). Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua satisfaciendo la siguiente condición: Existen $a, b > 0$ tales que*

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1} \quad \textit{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

donde $2^* := \dfrac{2n}{n-2}$ (conocido como el exponente crítico de Sobolev). Sean $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ y $J : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$J(u) = \int_\Omega F(u(x))dx.$$

Entonces J es Fréchet diferenciable en $H^1(\Omega)$ y

$$J'(u)v = \int_\Omega f(u(x))v(x)dx \quad \textit{para todo } u, v \in H^1(\Omega).$$

Lo mismo sucede si la funcional J está definida en $H_0^1(\Omega)$ (sin ninguna condición de regularidad sobre $\partial\Omega$).

Demostración. Notemos en primer lugar que la condición (8) implica que J está bien definida.

Para demostrar que J es Fréchet diferenciable, primero demostraremos que J' es Gateaux diferenciable y luego, su derivada de Gateaux J', es continua.

Recordemos la siguiente identidad elemental: para todo $p > 0$, existe $c_p > 0$ tal que

$$|a + b|^p \leq c_p(|a|^p + |b|^p) \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

i) Demostraremos que para todo $u, v \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} dx = \lim_{t\to 0} \int_\Omega f(u)vdx.$$

Cláramente, para todo $x \in \Omega$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t} = f(u(x))v(x).$$

Por el teorema de valor medio, existe $\theta \in \mathbb{R}$ con $|\theta| \leq |t|$, tal que

$$\begin{aligned} |q(t)| &= [f(u(x) + \theta v(x))v(x)| \\ &\leq \left(a + b|u(x) + \theta v(x)|^{2^*-1}\right)|v(x)| \\ &\leq c_1|v(x)| + c_2|u(x)|^{2^*-1}|v(x)| + c_3|v(x)|^{2^*} \end{aligned}$$

donde

$$q(t) = \frac{F(u(x) + tv(x)) - F(u(x))}{t},$$

para ciertas constantes positivas c_1, c_2 y c_3. El lado derecho de la última desigualdad está en $L^1(\Omega)$ y por lo tanto, por el teorema de la convergencia dominada, tenemos

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} dx = \lim_{t\to 0} \int_\Omega f(u)vdx.$$

Como el lado derecho, como función de v, es lineal y continua en $H^1(\Omega)$, J es Gateaux diferenciable.

ii) Demostremos que $J' : H^1(\Omega) \to [H^1(\Omega)]'$ es continua. Sea $\{u_k\}$ en $H^1(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ en $H^1(\Omega)$. Siendo $H^1(\Omega)$ inmerso en $L^{2^*}(\Omega)$, existe una subsucesión (que lo denotaremos del mismo modo) $\{u_k\}$ tal que

- $u_k \to u$ en $L^{2^*}(\Omega)$;
- $u_k(x) \to u(x)$ en ctp de Ω;
- existe $w \in L^{2^*}(\Omega)$ tal que $u_k(x) \leq w(x)$ en ctp de Ω y para todo k.

Por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned} |(J'(u_k) - J'(u))v| &\leq \int_\Omega |f(u_k) - f(u)||v|dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_\Omega |v|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \end{aligned}$$

De otro lado, como $\lim_{k\to\infty} |f(u_k(x)) - f(u(x))| = 0$ en ctp de Ω, y

$$\begin{aligned} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq c\left(1 + |u_k|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\ &\leq C\left(1 + |w|^{2^*-1} + |u|^{2^*-1}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\ &\leq C\left(1 + |w|^{2^*} + |u|^{2^*}\right) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} = 0$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |(J'(u_k) - J'(u))v| &= \sup\left[\, |(J'(u_k) - J'(u))v| : v \in S_1 \,\right] \\ &\leq C\left(\int_\Omega |f(u_k) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \end{aligned}$$

donde $S_1 = \{v \in H^1(\Omega), \|v\| = 1\}$. Se deduce que $J'(u_k) \to J'(u)$ en $[H^1(\Omega)]'$, lo que implica que J es Fréchet diferenciable en $H^1(\Omega)$ y $J'(u)v = \int_\Omega f(u)vdx$. □

Definición 2.1 (Función Carathéodory [10]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Se dice que una función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Carathéodory si satisface las siguientes propiedades:*

i) $\forall s \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, s)$ es medible en Ω;

ii) $\forall x \in \Omega$, $f(x, \cdot)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Similar a la proposición 2.1, consideremos la siguiente condición de crecimiento: existen $c, d > 0$ y $1 \leq \alpha \leq 2^*$ (si $n \geq 3$) ó $1 \leq \alpha < \infty$ (si $n = 1, 2$) tales que

$$|f(x, s)| \leq c + d|s|^\alpha, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Proposición 2.2 ([10]). *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Carathéodory satisfaciendo la condición de crecimiento (9) y $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, \tau)d\tau.$$

Entonces la funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(x, u)dx,$$

es de clase C^1 en H_0^1, con

$$D\Phi(u)v = \int_\Omega f(x, u)v \quad \textit{para todo } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

3 Existencia de solución débil

En esta sección estudiaremos la existencia de solución de algunas ecuaciones particulares que se relacionan a las ecuaciones formuladas en la Introducción.

Comencemos considerando la ecuación de Poisson–Dirichlet (PD) donde la función f depende solamente de $x \in \Omega$.

Proposición 3.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $f \in L^2(\Omega)$. La función Φ definida en (6) correspondiente a la ecuación (PD) está bien definida y satisface la condición Palais–Smale.*

Demostración. Por definición, $F(x,u) = \int_0^u f(x)ds = f(x)u$, de donde

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega f(x)udx,\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\langle \Phi'(u),\varphi\rangle &= \Phi'(u)\varphi\\ &= D_\varphi\Phi(u)\\ &= \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega f(x)\varphi \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

Siendo $\langle \Phi'(u),\varphi\rangle = \int_\Omega \nabla(\Phi'(u))\nabla\varphi$ (producto interno en $H_0^1(\Omega)$), tenemos

$$\int_\Omega \nabla(\Phi')\nabla\varphi = \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega f(x)\varphi \,\forall\varphi\in H_0^1(\Omega). \quad (10)$$

Por la fórmula de Green,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\Phi'(u))\nabla\varphi &= \int_\Omega \nabla(\Phi'(u))\nabla\varphi - \int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\Phi'(u)}{\partial\eta}ds\\ &= -\int_\Omega \varphi\Delta(\Phi'(u))\end{aligned}$$

de donde

$$\int_\Omega \nabla(\Phi'(u))\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi\Delta(\Phi'(u)).$$

Análogamente,

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi\Delta u.$$

Así, de (10), tenemos

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \varphi\Delta(\Phi'(u)) &= -\int_\Omega \varphi\Delta u - \int_\Omega f(x)\varphi\\ &= \int_\Omega (-\Delta u - f(x))\varphi \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega),\end{aligned}$$

de donde

$$-\Delta(\Phi'(u)) = -\Delta u - f(x),$$

lo que equivale a

$$u = \Phi'(u) + (-\Delta)^{-1}f(x).$$

Si $\{u_k\}$ es una sucesión en $H_0^1(\Omega)$ satisfaciendo $\Phi(u_k)$ acotada y $\Phi'(u_k)\to 0$, tenemos,

$$u_k = \Phi'(u_k) + (-\Delta)^{-1}f(x),$$

lo que implica (aún sin asumir la condición $\Phi(u_k)$ acotada) que

$$u_k \to (-\Delta)^{-1}f(x).$$

Se deduce que una subsucesión de $\{u_k\}$ (de hecho toda la sucesión) es convergente. Por lo tanto, Φ satisface la condición Palais-Smale. □

Proposición 3.2. *Si además de las condiciones de la proposición anterior, la función g es cero, entonces la función correspondiente Φ alcanza su mínimo global en $H_0^1(\Omega)$. En particular, la función ψ definida en (3) correspondiente a la ecuación de Laplace-Dirichlet (LD) alcanza su mínimo global en $H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la proposición 3.1 sobre la propiedad PS de la función Φ y el teorema 1.2 sobre la existencia de mínimo global, mostraremos que la función Φ es acotada inferiormente. Siendo Φ de la forma (10):

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega f(x)udx,$$

tenemos

$$\Phi(u) \geq -\int_\Omega f(x)udx. \quad (11)$$

Por la desigualdad de Poincaré, tenemos $\|u\|_2 \leq c\|\nabla u\|$ (siendo c una constante positiva), lo que implica

$$\begin{aligned}\|u\|_2^2 &\leq c^2\|\nabla u\|_2^2\\ &= c^2\langle\nabla u,\nabla u\rangle\\ &= c^2\int_\Omega \nabla u\nabla u\\ &= c^2\left(-\int_\Omega u\Delta u + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\eta}\right), \text{ (fórmula de Green)}\\ &= c^2\int_\Omega (-\Delta u)u\\ &= c^2\int_\Omega fu\\ &\leq c^2\|f\|\|u\|.\end{aligned}$$

Se deduce que $\|u\| \leq c^2\|f\|$ y por lo tanto, por la desigualdad (11), tenemos

$$\Phi(u) \geq -c^2\|f\|^2,$$

de donde Φ es acotada inferiormente. Por el Teorema 1.2, la función Φ alcanza su mínimo global en $H_0^1(\Omega)$. □

Ahora asumiremos que la función f de la ecuación de Poisson–Dirichlet (PD), depende solamente de u:

$$\begin{cases}-\Delta u = f(u), & x\in\Omega\\ u = 0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \quad (12)$$

Proposición 3.3 ([11]). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua satisfaciendo las siguientes propiedades:*

- $|f(u)| \leq a + b\|u\|^{\frac{n+2}{n-2}}$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $n \geq 3$;
- $f(t)t \leq 0$; *y*
- $[f(t) - f(s)](t - s) \leq 0$ *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$.

Entonces la funcional Φ *definida en (6) correspondiente a la ecuación (12) admite un único mínimo en* $H_0^1(\Omega)$.

Demostración. La funcional Φ tiene la siguiente expresión

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx,$$

donde $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(s)ds$. Se observa que Φ es continua y además para $u, v \in H_0^1(\Omega)$, tenemos

$$\begin{aligned}[\Phi'(u) - \Phi'(v)](u - v) &= \|u - v\|^2 \\ &\quad - \int_\Omega [f(u) - f(v)](u - v)dx \\ &\geq \|u - v\|^2.\end{aligned}$$

lo que implica que Φ es estrictamente convexa. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(u)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 \text{ (pues, } F(u) \leq 0, \ \forall u)\end{aligned}$$

lo que implica que Φ es coerciva. Se deduce que Φ admite un único mínimo global en $H_0^1(\Omega)$. □

1. Struwe, Michael, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
2. Troyanski, S. L., *Gateaux differentiable norms in Lp*, Math. Ann. 287, 221-227, 1990.
3. Krantz, Steven G., *Partial Differential Equations and Complex Analysis*, CRC Press, Inc., USA, 1992.
4. Gol'dshtein, Vladimir, *Axiomatic Theory of Sobolev Spaces*, Expo. Math. 19, 289-336, 2001.
5. Evans, Laurence C., *Partial Differential Equations*, University of California, USA, 1998.
6. Jabri, Youssef, *The Mountain Pass Theorem*, Cambridge University Press, New York, 2003.
7. Kartashov, E. M., *A new approach to the solution of Dirichlet and Neumann boundary value problems for the Laplace equations*, Thermal Engineering 57, 13, 1149-1155, 2010.
8. Chang, Jen-Shih, *Handbook of Electrostatic Processes*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1995
9. Le Dret, Hervé, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*, Springer International Publishing AG, Switzerland, 2018.
10. Costa, David G., *An invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhäuser Boston, USA, 2007
11. Badiale, Marino, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, Springer-Verlag, England, 2011.