Formulación variacional: Ecuaciones del calor y de onda

Héctor Guimaray Huerta, Eladio Ocaña Anaya
IMCA, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional de Ingeniería;
hguimaray@uni.edu.pe, eocana@imca.uni.edu.pe

Recibido el 6 de Marzo de 2020; aceptado el 25 de Junio de 2020

En este trabajo estudiamos la formulación variacional de las ecuaciones diferenciales parciales del calor y de onda, y posteriormente determinamos, usando los teoremas minimax, la existencia de solución débil de dichas ecuaciones, a través del análisis variacional, considerando estas soluciones como puntos críticos de ciertas funciones definida en un espacio de búsqueda que en nuestro caso será el espacio de Sobolev H^1 ó H_0^1.

Palabras Claves: Fórmula de Green, Soución débil, Punto crítico.

This work deals with the variational formulation of the heat and wave partial differential equations, and then, using the minimax theorems, we study the existence of weak solutions of these equations, through the variational analysis, considering these solutions as critical points of some functions defined on appropriated Sobolev spaces such as H^1 or H_0^1.

Keywords: Green's formula, Weak solution, Critical point.

1 Introducción

Estudiaremos la formulación variacional de las ecuaciones diferenciales parciales del calor y de onda, dando lugar a estudiar la existencia de puntos críticos de ciertas funcionales correspondientes a las ecuaciones diferenciales parciales mencionadas,

Los puntos críticos considerados en el trabajo son los ceros de la derivada de Gateaux [1].

La formulación variacional de una ecuación diferencial parcial (edp) se obtiene a partir de una reformulación integral de tal edp con la intervención de ciertos tipos de funciones llamadas funciones de prueba o test que para nosotros serán las funciones que forman el conjunto $C^\infty(\Omega)$ ó $C_0^\infty(\Omega)$,

$$C_0^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \Omega \supset \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto}\},$$

donde $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$, siendo Ω abierto de $\mathbb{R}^n$.

Para $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, definimos el **Espacio de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ como [2]:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha u =: g_\alpha$ es la **derivada parcial débil** de u, esto es, la función g_α que satisface

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Un caso especial de espacio de Sobolev es el espacio $H^m(\Omega)$ y más aún, el espacio $H^1(\Omega)$, definido por:

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

Una de las herramientas importantes del análisis variacional es la **Fórmula de Green** [3],

$$\int_\Omega f \triangle g dx = -\int_\Omega \nabla f \nabla g dx + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds,$$

donde $\dfrac{\partial g}{\partial \eta} = \nabla g.\eta$.

Esta identidad nos permite pasar de una edp (búsqueda de solución fuerte) a una ecuación integral (búsqueda de solución débil), y que bajo ciertas condiciones de regualidad, ambas soluciones coinciden.

Nuestro punto de partida en el tranajo es la formulación variacional de la **ecuación de Laplace**:

$$\Delta u = 0, \text{ sobre } \Omega,$$

asociada a las condiciones de frontera, según el caso, de **Dirichlet** o **Neumann**, [4].

2 Ecuaciones de Laplace y Poisson

2.1 Ecuación de Laplace-Dirichlet [5]

La ecuación de Laplace con condición de frontera de Dirichlet viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sobre } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{LD}$$

Una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface (LD) es llamada solución fuerte de la ecuación.

2.1.1 Formulación variacional de la ecuación (LD)

De la primera ecuación del sistema (LD), tenemos

$$\varphi \Delta u = 0, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \varphi \, \Delta \, u \\ &= -\int_\Omega \nabla\varphi \nabla u + \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \quad \text{(fórmula de Green)} \\ &= -\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Así, de la expresión (1) tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = 0, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2}$$

Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (2) es llamada **solución débil** de la ecuación (LD).

En general, se requieren ciertas condiciones de regularidad sobre $\partial\Omega$ y sobre u para que una solución débil sea también una solución fuerte.

2.1.2 La funcional de energía correspondiente a la ecuación (LD)

Asociada a la ecuación variacional (2), la funcional de energía correspondiente a la ecuación (LD) es la función $\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3}$$

Proposición 2.1. *La función ψ es de clase C^∞ en $H_0^1(\Omega)$. Además,*

$$D_\varphi \psi(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi, \quad \textit{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Demostración. Siendo $\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ un producto interno de $H_0^1(\Omega)$ cuya norma asociada es $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}$, tenemos $\frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$, de donde

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Se deduce que ψ es de clase C^∞ en $H_0^1(\Omega)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} D_\varphi \psi(u) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\psi(u + \epsilon\varphi) - \psi(u)}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\|u + \epsilon\varphi\|^2 - \|u\|^2}{\epsilon} \\ &= \langle u, \varphi \rangle \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi, \end{aligned}$$

lo que muestra la identidad deseada. □

Se deduce que toda solución u de (2) es un punto crítico de la función ψ.

2.2 Ecuaciones de Poisson–Dirichlet y Poisson–Neumann [6], [7]

La ecuación de Poisson con condición de frontera de Dirichlet (PD) viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{sobre } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{PD}$$

para ciertas funciones f y g. Similar al caso anterior, una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que satisface (PD) es llamada solución fuerte.

2.2.1 Formulación variacional de la ecuación (PD)

De la primera ecuación del sistema (PD), tenemos

$$-\Delta u \varphi = f(x, u)\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x, u)\varphi &= \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \\ &= -\int_\Omega \varphi \Delta u \\ &= \int_\Omega \nabla\varphi \nabla u - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} ds \quad \text{(fórmula de Gre} \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f(x, u)\varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5}$$

Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface (5) es llamada **solución débil** de la ecuación (PD).

2.2.2 La funcional de energía correspondiente a la ecuación (PD)

Asociada a la ecuación (5), consideremos la función $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi = \psi - \phi, \tag{6}$$

donde ψ es la función definida en (3) y ϕ es la función definida en $H_0^1(\Omega)$ por

$$\phi(u) = \int_\Omega F(x, u)dx, \qquad \text{donde} \quad F(x, u) = \int_0^u f(x, s)ds. \tag{7}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla u\|^2 - \int_\Omega F(x, u)dx \\ &= \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - F(x, u)\right]. \end{aligned}$$

Proposición 2.2. *Se cumple,*

$$D_\varphi \Phi(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega f\varphi, \quad \textit{para todo } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Demostración. Es suficiente demostrar que $D_\varphi \phi(u) = \int_\Omega f\varphi$. Tenemos,

$$\begin{aligned}
D_\varphi \phi(u) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\phi(u+\epsilon\varphi)-\phi(u)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega [F(x,u+\epsilon\varphi)-F(x,u)]dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega \frac{1}{\epsilon}\left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} f(x,s)ds\right] dx \\
&= \int_\Omega \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} f(x,s)ds\right] dx \\
&= \int_\Omega \lim_{\epsilon\to 0} f(x,u+\epsilon\varphi)\varphi dx \text{ (regla de L'Hôpital)} \\
&= \int_\Omega f\varphi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_\varphi \Phi(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi - \int_\Omega f\varphi$. □

Se deduce que toda solución u de (5) es un punto crítico de Φ.

2.3 La ecuación de Poisson–Neumann

La ecuación de Poisson con condición de frontera de Neumann (PN) viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{sobre } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{PN}$$

para ciertas funciones f y g.

2.3.1 Formulación variacional de la ecuación (PN)

De la primera ecuación del sistema (PN), tenemos

$$-\Delta u\varphi = f(x,u)\varphi, \text{ para todo } \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,u)\varphi &= -\int_\Omega \varphi\Delta u \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u - \int_{\partial\Omega} \varphi\frac{\partial u}{\partial\eta}ds \text{ (Green)}.
\end{aligned}$$

Una función $u \in H^1(\Omega)$ que satisface la ecuación

$$\int_\Omega \nabla\varphi\nabla u - \int_{\partial\Omega} \varphi g ds = \int_\Omega f(x,u)\varphi, \ \forall\, \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{8}$$

es llamada **solución débil** de la ecuación (PN).

2.3.2 La funcional de energía correspondiente a la ecuación (PN)

Asociada a la ecuación (8), consideremos la función $\Phi : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega uf(x,u) - \int_\Omega F(x,u) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_{\partial\Omega} ug - \int_\Omega F(x,u),
\end{aligned}$$

donde $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$.

Proposición 2.3. *Se cumple,*

$$D_\varphi\Phi(u) = \int_\Omega \nabla\varphi\nabla u - \int_{\partial\Omega} g\varphi ds - \int_\Omega f\varphi, \ \forall\, \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Demostración. Similar a la demostración de la proposición 2.2. □

Se deduce que toda solución u de (8) es un punto crítico de Φ.

3 Ecuación del Calor [8]

Consideremos en este caso el cilindro $Q = \Omega \times (0,\infty)$, donde Ω sigue siendo un conjunto abierto con frontera $\partial\Omega$. La frontera de Q, llamada **frontera lateral de** Q, es el conjunto $\partial Q = \partial\Omega \times (0,\infty)$.

La ecuación del calor con condición de frontera de Dirichlet viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t,u) & \text{sobre } Q, \\ u = g(x.t,u) & \text{sobre } \partial Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sobre } \Omega, \end{cases} \tag{CD}$$

para ciertas funciones f, g y u_0.

3.0.1 Formulación variacional de la ecuación (CD)

De la primera ecuación de (CD) tenemos

$$u_t\varphi - \Delta u\varphi = f\varphi, \text{ para todo } \varphi \in C^\infty(\overline{Q}),$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int_Q f\varphi &= \int_Q u_t\varphi - \int_Q \varphi\Delta u \\
&= \int_Q u_t\varphi + \int_Q \nabla u\nabla\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial\eta}\varphi \text{ (Green)} \\
&= \int_Q u_t\varphi + \int_Q \nabla u\nabla\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial\eta}\varphi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_Q u_t\varphi + \int_Q \nabla u\nabla\varphi = \int_Q f\varphi + \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial\eta}\varphi, \ \forall\, \varphi \in C^\infty(\overline{Q}). \tag{9}$$

Una función u en $H^1(Q)$ que satisface (9) es llamada solución débil de la ecuación (CD).

3.0.2 La funcional de energía correspondiente a la ecuación (CD)

Asociada a la ecuación (9) consideremos la función $\Phi : H^1(Q) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi = \psi - \phi + \Psi - \Theta, \tag{10}$$

donde ψ y ϕ son las funciones definidas en (3) y (7), respectivamente, y Ψ y Θ son las funciones definidas en $H^1(Q)$ por:

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \int_Q \mathcal{F}(x,t,u)dx, \quad \text{donde} \\ \mathcal{F}(x,t,u) &= \int_0^u u_t(x,t,s)ds, \end{aligned} \tag{11}$$

y

$$\Theta(u) = \int_{\partial Q} \mathcal{G}(x,t,u)dx, \text{ con } \mathcal{G}(x,t,u) = \int_0^u \frac{\partial g}{\partial \eta}(x,t,s)ds. \tag{12}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} \Phi(u) = &\int_Q \left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - F(x,t,u) + \mathcal{F}(x,t,u)\right] \\ &- \int_{\partial Q} \mathcal{G}(x,t,u). \end{aligned}$$

Proposición 3.1. *Se cumple,*

$$D_\varphi \Phi(u) = \int_Q \nabla u \nabla \varphi - \int_Q f\varphi + \int_Q u_t\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi,$$

para todo $\varphi \in H^1(Q)$.

Demostración. enemos

$$\begin{aligned} D_\varphi \Psi(u) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Psi(u+\epsilon\varphi) - \Psi(u)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_Q [\mathcal{F}(x,t,u+\epsilon\varphi) - \mathcal{F}(x,t,u)]dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_Q \left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} u_t(x,t,s)ds\right] dx \\ &= \int_Q \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} u_t(x,t,s)ds\right] dx \\ &= \int_Q \lim_{\epsilon\to 0} u_t(x,t,u+\epsilon\varphi)\varphi dx, \text{ (L'Hôpital)} \\ &= \int_Q u_t\varphi. \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} D_\varphi \Theta(u) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Theta(u+\epsilon\varphi) - \Theta(u)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial Q} [\mathcal{G}(x,t,u+\epsilon\varphi) - \mathcal{G}(x,t,u)]dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\partial Q} \left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} \frac{\partial g}{\partial \eta}(x,t,s)ds\right] dx \\ &= \int_{\partial Q} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} \frac{\partial g}{\partial \eta}(x,t,s)ds\right] dx \\ &= \int_{\partial Q} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\partial g}{\partial \eta}(x,t,u+\epsilon\varphi)\varphi dx, \text{ (L'Hôpital)} \\ &= \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_\varphi\Phi(u) = \int_Q \nabla u \nabla\varphi - \int_Q f\varphi + \int_Q u_t\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi$. □

Se deduce que toda solución u de (9) es un punto crítico de Φ.

4 Ecuación de Onda [9]

Similar a la ecuación del calor, consideremos $Q = \Omega \times (0,\infty)$, siendo Ω abierto con frontera $\partial\Omega$ y $\partial Q = \partial\Omega \times (0,\infty)$.

La ecuación de onda con condición de frontera de Dirichlet viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x,t,u) & \text{sobre } Q, \\ u = g(x,t,u) & \text{sobre } \partial Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sobre } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \nu_0(x) & \text{sobre } \Omega, \end{cases} \tag{OD}$$

para ciertas funciones f, g, u_0 y ν_0.

4.0.1 Formulación variacional de la ecuación (OD)

De la primera ecuación de (OD) tenemos

$$u_{tt}\varphi - \Delta u\varphi = f\varphi, \quad \text{para todo } \varphi \in H^1(Q),$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_Q f\varphi &= \int_Q (u_{tt} - \Delta u)\varphi \\ &= \int_Q u_{tt}\varphi - \int_Q \varphi\Delta u \\ &= \int_Q u_{tt}\varphi + \int_Q \nabla u\nabla\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial \eta}\varphi ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_Q u_{tt}\varphi + \int_Q \nabla u \nabla\varphi = \int_Q f\varphi + \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi, \ \forall\, \varphi \in H^1(\Omega) \tag{13}$$

Una función u en $H^1(Q)$ que satisface (13) es llamada solución débil de la ecuación (OD).

4.0.2 La funcional de energía correspondiente a la ecuación (OD)

Asociada a la ecuación (13), consideremos la función $\Phi : H^1(Q) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi = \psi - \phi + \Xi - \Theta, \tag{14}$$

donde ψ, ϕ y Θ son aquellas definidas en (3), (7) y (12). respectivamete, y Ξ es la función definida en $H^1(Q)$ por

$$\Xi(u) = \int_Q \mathcal{F}(t,x,u), \text{ donde } \mathcal{F}(t,x,u) = \int_0^u u_{tt}(t,x,s)ds. \tag{15}$$

Tenemos,

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_Q \|\nabla u\|^2 - \int_Q F(t,x,u) + \int_Q \mathcal{F}(t,x,u) - \int_{\partial Q} \mathcal{G}(x,t,u) \\ &= \int_Q \left[\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - F(t,x,u) + \mathcal{F}(t,x,u)\right] - \int_{\partial Q} \mathcal{G}(x,t,u).\end{aligned}$$

Proposición 4.1. *Se cumple,*

$$D_\varphi \Phi(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega f\varphi + \int_\Omega u_{tt}\varphi - \int_{\partial Q} \frac{\partial g}{\partial \eta}\varphi.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned}D_\varphi \Xi(u) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Xi(u+\epsilon\varphi) - \Xi(u)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_Q [\mathcal{F}(t,x,u+\epsilon\varphi) - \mathcal{F}(t,x,u)] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_Q \left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} u_{tt}(t,x,s)ds\right] \\ &= \int_Q \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[\int_u^{u+\epsilon\varphi} u_{tt}(t,x,s)ds\right] \\ &= \int_Q \lim_{\epsilon\to 0} u_{tt}(t,x,u+\epsilon\varphi)\varphi, \quad \text{(regla de L'Hôpital)} \\ &= \int_Q u_{tt}\varphi.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_\varphi\Phi(u) = \int_Q \nabla u \nabla\varphi - \int_Q f\varphi + \int_Q u_{tt}\varphi - \int_{\partial Q}\frac{\partial g}{\partial\eta}\varphi$. □

Se deduce que toda solución u de (13) es un punto crítico de Φ.

5 Conclusiones

A través del análisis variacional hemos estudiado las formulaciones variacionales de las edps del calor y de onda. Las soluciones de estas formulaciones variacionales coinciden con los ceros de la derivada de Gateaux de ciertas funciones, llamadas funciones de energía.

1. Troyanski, S. L., *Gateaux differentiable norms in Lp*, Math. Ann. 287, 221-227, 1990.
2. Krantz, Steven G., *Partial Differential Equations and Complex Analysis*, CRC Press, Inc., USA, 1992.
3. Evans, Laurence C., *Partial Differential Equations*, University of California, USA, 1998.
4. Epstein, Marcelo, *Partial Differential Equations. Mathematical Techniques for Engineers*, Springer International Publishing, Switzerland, 2017.
5. Kartashov, E. M., 57, 13, 1149-1155, 2010.
6. Chang, Jen-Shih, *Handbook of Electrostatic Processes*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1995
7. Molchanov, I. N., Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 13, 6, 1607-1612, 1973.
8. Brezis, Haim, *Functional Analysis, Sovolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
9. Keller, J. B., *On solutions of nonlinear wave equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. X, 523-530, 1957.