

# Generación de estados de Fock Bimodales

Oscar Miculicich <sup>†</sup> y Eduardo Massoni <sup>‡</sup>

<sup>†</sup>Facultad de Ciencias de la UNI, <sup>‡</sup>Departamento de Física de la PUCP

Recibido el 01 de setiembre del 2011; aceptado el 15 octubre del 2011

Este trabajo presenta una propuesta para preparar estados de Fock bimodales, esto es, un estado asociado a un número fijo de fotones en una cavidad QED de alta calidad y un número fijo de fonones para el estado de movimiento de un ión atrapado, en un sistema físico descrito en [1]. Esto es posible en el régimen de dinámica efectiva del sistema con solo una medición oportuna del nivel de energía atómico del ión. Por otro lado, se muestra que el Hamiltoniano efectivo obtenido en [1] es equivalente al obtenido por un proceso de eliminación adiabática de uno de los estados atómicos del ión.

**Palabras Claves:** Hamiltoniano efectivo, iones atrapados, cavidad QED, eliminación adiabática.

We propose a mechanism to prepare bimodal Fock states, i.e., states with a fixed number of photons in a high-quality QED cavity and a fixed number of phonons for the state of motion of a trapped ion, in a system described in [1]. We show that this is possible, in the effective-dynamics regime of the system, through a timely measurement of the atomic energy level of the ion. Also, we show that the effective Hamiltonian of [1] is equivalent to the one obtained by adiabatic elimination of one of the atomic states of the ion.

**Keywords:** Effective Hamiltonian, trapped ions, QED cavity, adiabatic elimination.

## 1. Introducción

Desde el primer trabajo experimental del micromaser [2], las técnicas experimentales con respecto a una cavidad QED han sido sustancialmente desarrolladas inclusive en el dominio óptico [3]. En este sentido, la preparación y control de estados cuánticos del sistema átomo-cavidad resulta cada vez más eficiente; así mismo, dicho desarrollo permite verificar y observar una variedad de fenómenos cuánticos atribuidos al “entanglement” entre el átomo y los fotones de la cavidad (en el límite de acoplamiento fuerte) [4], [5].

Por otro lado, la investigación en técnicas de confinamiento de iones permiten diversas posibilidades en cuanto a la preparación, estudio y control de estados de movimiento no clásicos de los iones atrapados [6], [7]; esto es, brindan (por ejemplo) la posibilidad de almacenamiento y manipulación de información cuántica con el objetivo de desarrollar la computación cuántica [8].

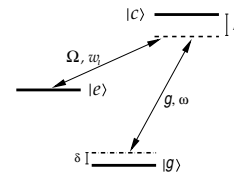
En dicho contexto, el presente trabajo estudia la posibilidad de que el sistema constituido por un ión atrapado que interactúa con un láser en el interior de una cavidad QED [1], pueda presentar en cierto régimen una dinámica “selectiva” con la capacidad de generar estados de Fock bimodales por aplicación de un pulso  $\pi$  de Rabi; esto es, el sistema elegido brinda la posibilidad de preparar un estado constituido por un número fijo de fotones en la cavidad QED, y un número fijo de fonones asociado al movimiento del ión (un estado no clásico del movimiento), ello mediante una medición oportuna del estado atómico del ión.

Previo a la presentación de la interacción selectiva del sistema propuesto, se obtiene el Hamiltoniano efectivo del sistema físico por medio de un proceso de eliminación adiabática siguiendo criterios utilizados en sistemas no lineales [9]. Dicho régimen de adiabaticidad fue puesto

en evidencia, en un trabajo previo [1], durante el proceso de obtención del Hamiltoniano efectivo por el método estándar de la serie de Dyson.

## 2. Hamiltoniano del sistema

El sistema físico (SF) consiste en un ión atrapado interactuando con dos campos electromagnéticos externos. El primero de ellos corresponde al campo asociado a un láser (caso clásico); mientras que el segundo es un modo del campo electromagnético (caso cuántico) en una cavidad QED de alta calidad.



**Figura 1.** Esquema energético de la interacción de los niveles atómicos del ión con los campos EM [ $\Omega$  es el acoplamiento con el láser, y  $g$  con la cavidad QED].

De acuerdo a lo anterior y en la aproximación de onda rotante para el acoplamiento tomo-cavidad, el Hamiltoniano del SF está dado por:

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_1 & (1) \\
 H_0 &= \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\nu b^\dagger b + \hbar\omega_g |g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_c |c\rangle\langle c| \\
 H_1 &= \hbar g \cos(k_0 x + \phi) [a\sigma_1^+ + a^\dagger\sigma_1^-] \\
 &\quad + \hbar\Omega e^{-i(k_1 x - \omega_1 t)} \sigma_2^- + \hbar\Omega^* e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} \sigma_2^+
 \end{aligned}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la cavidad,  $\nu$  es la frecuencia vibracional del ión,  $g$  es la constante de acoplamiento entre el tomo y la cavidad, y  $\Omega$  es la constante de

acoplamiento entre el tomo y el laser, este último caracterizado por su frecuencia,  $w_l$ , y número de onda,  $k_l$ . Los operadores de creación de fotones y fonones son denotados por  $a^+$  y  $b^+$ , respectivamente. Se asume que el ión oscila en sólo una dirección (definiendo así el eje X de oscilación), y las frecuencias asociadas a los campos electromagnéticos son tales que sólo 3 niveles  $|g\rangle$ ,  $|e\rangle$ , y  $|c\rangle$ , de la estructura interna del tomo, participan principalmente en la dinámica del SF. Los operadores asociados a las transiciones entre dichos niveles son denotados por  $\sigma_1^- = |g\rangle\langle c|$  y  $\sigma_2^- = |e\rangle\langle c|$ , así como sus correspondientes operadores adjuntos  $\sigma_1^+ = |c\rangle\langle g|$  y  $\sigma_2^+ = |c\rangle\langle e|$ . La posición del tomo respecto al campo cuantizado en la cavidad se especifica a través de la fase  $\phi$ . En la representación de interacción, la ecuación de Schrödinger esta dada por:

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle_I = V(t)|\psi(t)\rangle_I \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &\equiv U_o^+(t)|\psi(t)\rangle \\ \mathcal{V}(t) &\equiv (H_1)_I \equiv U_o^+(t)H_1U_o(t) \\ U_o(t) &\equiv e^{-iH_o t/\hbar} \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. Hamiltoniano efectivo por eliminación adiabática

Con el objetivo de obtener un Hamiltoniano efectivo por eliminación adiabática del estado interno  $|c\rangle$  del ión, primero se pasar a una representación de interacción parcial al considerar:

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{H}_o + \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_o &= H_o - \hbar w_1|e\rangle\langle e| - \hbar w_2|g\rangle\langle g| - \hbar\nu b^+b \\ \mathcal{H}_1 &= H_1 + \hbar w_1|e\rangle\langle e| + \hbar w_2|g\rangle\langle g| + \hbar\nu b^+b \end{aligned} \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que un operador se transforma en forma análoga a  $H_1$  en (3), el operador  $\mathcal{V}(t) \equiv e^{i\mathcal{H}_o t/\hbar}\mathcal{H}_1e^{-i\mathcal{H}_o t/\hbar}$ , esta dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= -\hbar\Delta|e\rangle\langle e| - \hbar(\Delta + \delta)|g\rangle\langle g| \\ &+ \hbar g \cos(k_o x + \phi)[a\sigma_1^+ + a^+\sigma_1^-] \\ &+ \hbar\Omega e^{-ik_l x}\sigma_2^- + \hbar\Omega^* e^{ik_l x}\sigma_2^+ + \hbar\nu b^+b \end{aligned} \quad (5)$$

donde se eligieron  $w_1 = -\Delta$  y  $w_2 = -(\Delta + \delta)$ , de tal forma que el operador  $\mathcal{V}$  no depende explícitamente del tiempo. Adems:

$$\Delta \equiv \omega_c - \omega_e - w_l \quad (6)$$

$$\delta \equiv \omega_e - \omega_g + w_l - \omega \quad (7)$$

y:

$$x \equiv x_o(b^+ + b) \quad (8)$$

En forma compacta, el Hamiltoniano (5) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= -\hbar\Delta|e\rangle\langle e| - \hbar(\Delta + \delta)|g\rangle\langle g| \\ &+ \hbar\{\Gamma_1|c\rangle\langle g| + \Gamma_2|c\rangle\langle e| + \text{h.c.}\} + \hbar\nu b^+b \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son funciones evaluadas en los operadores bosónicos:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv g \cos(k_o x + \phi)a = \frac{g}{2} [D(\beta)e^{i\phi} + D(\beta)^+e^{-i\phi}]a \\ \Gamma_2 &\equiv \Omega^* e^{ik_l x} = \Omega^* D(\alpha) \end{aligned}$$

donde  $D(u) \equiv e^{ub^+ - u^*b}$  es el operador de desplazamiento bosónico, y además se definieron los argumentos:

$$\beta \equiv i\eta_o \quad y \quad \alpha \equiv i\eta \quad (10)$$

con los parámetros de Lamb-Dicke definidos como:  $\eta \equiv k_l x_o$  y  $\eta_o \equiv k_o x_o$ .

Por otro lado, a partir de la ecuación de Liouville:

$$\partial_t \rho = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{V}, \rho] \quad (11)$$

se obtienen las ecuaciones asociadas al Hamiltoniano (9) para los "elementos de matriz",  $\rho_{ij} \equiv \langle i|\rho|j\rangle$  ( $i, j = g, e, c$ ):

$$\begin{aligned} i\partial_t \rho_{cc} &= \Gamma_1 \rho_{gc} - \rho_{cg} \Gamma_1^+ + \Gamma_2 \rho_{ec} - \rho_{ce} \Gamma_2^+ + \nu [b^+ b, \rho_{cc}] \\ i\partial_t \rho_{gg} &= -\rho_{gc} \Gamma_1 + \Gamma_1^+ \rho_{cg} + \nu [b^+ b, \rho_{gg}] \\ i\partial_t \rho_{ee} &= -\rho_{ec} \Gamma_2 + \Gamma_2^+ \rho_{ce} + \nu [b^+ b, \rho_{ee}] \\ i\partial_t \rho_{ce} &= \Delta \rho_{ce} + \Gamma_1 \rho_{ge} + \Gamma_2 \rho_{ee} - \rho_{cc} \Gamma_2 + \nu [b^+ b, \rho_{ce}] \\ i\partial_t \rho_{cg} &= (\Delta + \delta) \rho_{cg} + \Gamma_2 \rho_{eg} + \Gamma_1 \rho_{gg} - \rho_{cc} \Gamma_1 + \nu [b^+ b, \rho_{cg}] \\ i\partial_t \rho_{eg} &= \delta \rho_{eg} - \rho_{ec} \Gamma_1 + \Gamma_2^+ \rho_{cg} + \nu [b^+ b, \rho_{eg}] \end{aligned}$$

Ahora se procede a realizar la eliminación adiabática del nivel  $|c\rangle$ , teniendo en cuenta criterios similares al caso de sistemas dinámicos no lineales [9]. Para ello se establecen las condiciones:

1. El "detuning" del nivel  $|c\rangle$  debe ser de mayor orden que la frecuencia de vibración del ión; esto es, se exige  $\Delta \gg N_e \nu$  (con  $N_e$  elegido en la estadística fonónica inicial, tal que para  $N > N_e$  la población fonónica es insignificante)
2. Las constantes de acoplamiento del ión con la cavidad,  $g$ , y del ión con el láser,  $|\Omega|$ , deben ser del mismo orden.
3. Las constantes de acoplamiento,  $g$  y  $|\Omega|$ , deben ser de menor orden que el "detuning"; esto es, se debe cumplir  $g|\Omega| \ll \Delta^2$ .

con las cuales los elementos  $\rho_{ce}$  y  $\rho_{cg}$  permanecen en estado estacionario en una escala de tiempo del orden de  $\left[\frac{g|\Omega|}{\Delta}\right]^{-1}$ ; esto es,  $\partial_t \rho_{ce} = \partial_t \rho_{cg} = 0$ . Luego, en dicha aproximación, las ecuaciones previas se expresan como:

$$i\partial_t \rho_{cc} = \left[ \frac{\Gamma_1 \Gamma_1^+}{\Delta}, \rho_{cc} \right] + \left[ \frac{\Gamma_2 \Gamma_2^+}{\Delta}, \rho_{cc} \right] + \nu [b^+ b, \rho_{cc}] \quad (12)$$

$$i\partial_t \rho_{gg} = \rho_{ge} \left( \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_1}{\Delta} \right) - \left( \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_2}{\Delta} \right) \rho_{eg} - \left[ \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_1}{\Delta}, \rho_{gg} \right] + \nu [b^+ b, \rho_{gg}] \quad (13)$$

$$i\partial_t \rho_{ee} = \rho_{eg} \left( \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_2}{\Delta} \right) - \left( \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_1}{\Delta} \right) \rho_{ge} - \left[ \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_2}{\Delta}, \rho_{ee} \right] + \nu [b^+ b, \rho_{ee}] \quad (14)$$

$$i\partial_t \rho_{eg} = \rho_{eg} \left[ \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_1}{\Delta} + \Delta + \delta \right] - \left[ \Delta + \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_2}{\Delta} \right] \rho_{eg} + \rho_{ee} \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_1}{\Delta} - \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_1}{\Delta} \rho_{gg} + \nu [b^+ b, \rho_{eg}] \quad (15)$$

Como se puede verificar, las últimas cuatro ecuaciones describen la dinámica del SF (ecuación de Liouville) asociada al siguiente Hamiltoniano efectivo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ef}(t) = & -\hbar \left[ \Delta + \frac{|\Omega|^2}{\Delta} \right] |e\rangle\langle e| - \hbar \left[ \Delta + \delta + \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_1}{\Delta} \right] |g\rangle\langle g| \\ & - \hbar \left[ \frac{\Gamma_1^+ \Gamma_2}{\Delta} \right] |g\rangle\langle e| - \hbar \left[ \frac{\Gamma_2^+ \Gamma_1}{\Delta} \right] |e\rangle\langle g| \\ & + \hbar \left[ \Gamma_1 \Gamma_1^+ + \frac{|\Omega|^2}{\Delta} \right] |c\rangle\langle c| + \hbar \nu b^+ b \end{aligned} \quad (16)$$

donde se reemplazó  $\Gamma_1^+ \Gamma_2 = |\Omega|^2$ .

Se puede observar, tanto de las ecuaciones (12 – 15) como del Hamiltoniano (16), que el nivel  $c$  de la estructura interna del tomo queda desacoplado de los otros niveles,  $g$  y  $e$ . Luego, el SF se comporta efectivamente como un tomo de dos niveles interactuando con dos modos bosónicos ( $a$  y  $b$ ).

Ahora, al completar el paso a la representación de interacción con los términos restantes de (4),  $-\hbar\Delta|e\rangle\langle e| - \hbar(\Delta + \delta)|g\rangle\langle g| + \hbar\nu b^+ b$ , y restringiendonos al subespacio generado por los vectores  $|e, n, N\rangle$  y  $|g, m, M\rangle$ , el Hamiltoniano efectivo del SF en la representación de interacción total esta dado por:

$$\begin{aligned} H_{ef}(t) = & -\frac{\hbar}{\Delta} \left\{ |\Omega|^2 |e\rangle\langle e| + \Gamma_{1t}^+ \Gamma_{1t} |g\rangle\langle g| \right. \\ & \left. + \Gamma_{1t}^+ \Gamma_{2t} e^{-i\delta t} |g\rangle\langle e| + \Gamma_{2t}^+ \Gamma_{1t} e^{i\delta t} |e\rangle\langle g| \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $\Gamma_{1t}$  y  $\Gamma_{2t}$  son funciones evaluadas en los operadores bosónicos:

$$\Gamma_{1t} \equiv \frac{g}{2} [D(\beta_t) e^{i\phi} + D(\beta_t)^+ e^{-i\phi}] a \quad (18)$$

$$\Gamma_{2t} \equiv \Omega^* D(\alpha_t) \quad (19)$$

con los argumentos (de los operadores de desplazamiento):

$$\beta_t \equiv i\eta_o e^{i\nu t} \quad \text{y} \quad \alpha_t \equiv i\eta e^{i\nu t} \quad (20)$$

Finalmente, al considerar la condición de resonancia,  $\delta = \pm k\nu$ , y despreciando las contribuciones de los términos de oscilación rápida (aproximación de onda rotante

para los grados de libertad de movimiento del ión), el Hamiltoniano efectivo del SF se expresa como:

$$\begin{aligned} H_{ef}^\pm = & -\frac{g^2 \hbar}{2\Delta} \left[ e^{-2\eta_o} \cos(2\phi) f_o(2\eta_o) + 1 \right] a^+ a |g\rangle\langle g| \\ & - \frac{|\Omega|^2 \hbar}{\Delta} |e\rangle\langle e| - \frac{g\Omega^* \hbar}{2\Delta} F_{k,\pm}(\eta_o, \eta) a^+ |g\rangle\langle e| \\ & - \frac{g\Omega \hbar}{2\Delta} (F_{k,\pm}(\eta_o, \eta))^+ a |e\rangle\langle g| \end{aligned} \quad (21)$$

donde las funciones evaluadas en operadores,  $F_{k,\pm}$ , corresponden a las obtenidas por el método de serie de Dyson [1], en el mismo régimen.

## 4. Evolución y estados de Fock bimodales

### 4.1. Evolución del sistema

Teniendo en cuenta el proceso de diagonalización de  $H_{ef}^\pm$  descrito en [1], es posible obtener el estado del sistema en instantes posteriores al inicial. Por ejemplo, para un ión inicialmente en su estado excitado, el vector de estado en instantes posteriores debido a la evolución con el Hamiltoniano  $H_{ef}^+$  esta dado por:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & \sum_{n,N} a_{n,N,+} e^{-iE_{n,N,+}^+ t/\hbar} |\psi_{n,N,+}^+\rangle \\ & + a_{n,N,-} e^{-iE_{n,N,-}^+ t/\hbar} |\psi_{n,N,-}^+\rangle \end{aligned} \quad (22)$$

donde:

$$a_{n,N,+} = \langle \psi_{n,N,+}^+ | \psi(0) \rangle = \cos\left(\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right) e^{i\xi/2} \chi_{n,N}$$

$$a_{n,N,-} = \langle \psi_{n,N,-}^+ | \psi(0) \rangle = -\sin\left(\frac{\theta_{n,N,k}^+}{2}\right) e^{i\xi/2} \chi_{n,N}$$

Por ejemplo, la inversión (en este caso) se puede expresar como:

$$W_e^+(t) \equiv \langle \psi(t) | \sigma_z | \psi(t) \rangle = 1 - 2 \sum_{n,N} \chi_{n,N}^2 \left[ 1 - \left( \frac{\Delta_{n,N,k}^+}{R_{n,N,k}^+} \right)^2 \right] \sin^2 \left( \frac{R_{n,N,k}^+}{4\Delta} t \right) \quad (23)$$

## 4.2. Dinámica selectiva

Se puede observar que, de la ecuación (23), la expresión  $\left[1 - \left(\frac{\Delta_{n,N,k}^+}{R_{n,N,k}^+}\right)^2\right]$  actúa como un peso que puede seleccionar cual de los  $\chi_{n,N}^2$  será al final importante; esto es, con una adecuada elección de los parámetros del sistema se puede lograr que dicha expresión sea casi nula para todos los valores  $(n, N)$  excepto para un par  $(n_o, N_o)$  preseleccionado. Luego, lo anterior se puede conseguir si se satisface las siguientes condiciones:

$$\Delta_{n_o, N_o, k}^+ = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\Delta_{n,N,k}^+}{R_{n,N,k}^+} \approx 1 \quad \forall \quad (n, N) \neq (n_o, N_o) \quad (25)$$

donde primero se fija el parámetro  $\delta = k\nu$ . Ahora, las condiciones previas se pueden satisfacer si las constantes de acoplamiento,  $\Omega$  y  $g$ , cumplen:

$$|\Omega|^2 = \frac{1}{2}g^2(n_o + 1) \left[ e^{-2\eta_o^2} \cos(2\phi) L_{N_o+k}(4\eta_o^2) + 1 \right] \quad (26)$$

mientras que los parámetros de Lamb-Dicke,  $\eta_o$  y  $\eta$ , deben satisfacer:

$$S_{n,N,k}(\eta_o, \eta) \equiv \frac{2g|\Omega A_N^k \sqrt{n+1}}{\Delta_{n,N,k}^+} \ll 1 \quad \forall \quad (n, N) \neq (n_o, N_o) \quad (27)$$

Con el objetivo de obtener una expresión que permita estimar el orden de magnitud de los parámetros de Lamb-Dicke adecuados para satisfacer las condiciones previas, se procede a realizar una expansión en serie de potencias

de la función  $S_{n,N,k}(\eta_o, \eta)$ , obteniéndose:

$$S_{n,N,k}(\eta_o, \eta) \simeq \frac{2\sqrt{(1+n_o)(1+n)}}{(n_o - n)} \sqrt{\frac{1}{k!} \binom{N+k}{k}} \eta_m^k + O(\eta_m^{k+1})$$

donde  $\eta_m \equiv \max\{\eta_o, \eta\} < 1$ . Luego, la condición (27) equivale a exigir:

$$Q_{n,N,k}(\eta_m) \equiv \frac{2\sqrt{(1+n_o)(1+n)}}{(n_o - n)} \sqrt{\frac{1}{k!} \binom{N+k}{k}} \eta_m^k \ll 1 \quad \forall \quad (n, N) \neq (n_o, N_o) \quad (28)$$

Ahora, se observa que  $Q_{n,N,k} \leq Q_{n_o+1, N_e, k} \forall n \geq 0$  y  $N \leq N_e$ , donde  $N_e$  es tomado de la estadística fonónica inicial, de tal forma que,  $\chi_{n_o, N} \ll 1$  si  $N > N_e$ , con lo cual (28) se reduce a:

$$\eta_m(n_o, N_o, k) \lesssim \left[ \frac{10^{-\alpha}}{2\sqrt{(1+n_o)(2+n_o)}} \sqrt{\frac{k!}{\binom{N_e+k}{k}}} \right]^{1/k} \quad (29)$$

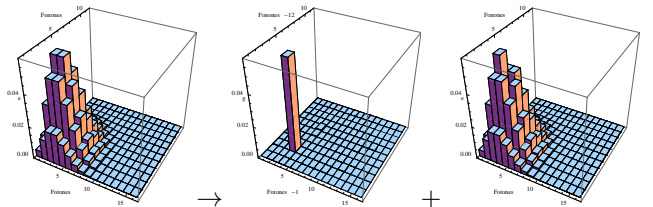
con  $10^{-\alpha} \ll 1$ . Con esto, las ecuaciones (26) y (29) establecen las condiciones para los parámetros del sistema de tal forma que, es posible preseleccionar un subespacio específico,  $\{|e, n_o, N_o\rangle, |g, n_o + 1, N_o + k\rangle\}$ , para la evolución del sistema.

De (29) se observa que para un parámetro de Lamb-Dicke dado,  $\eta_m(n_o, M_o, k)$ , es posible (con el mismo valor de dicho parámetro) preseleccionar subespacios,  $\{|e, n, N\rangle, |g, n + 1, N + k\rangle\}$ , con las condiciones  $n \leq n_o$ ,  $N \leq N_o$  y  $k \geq k_o$ , siempre que logren satisfacer una ecuación como (26).

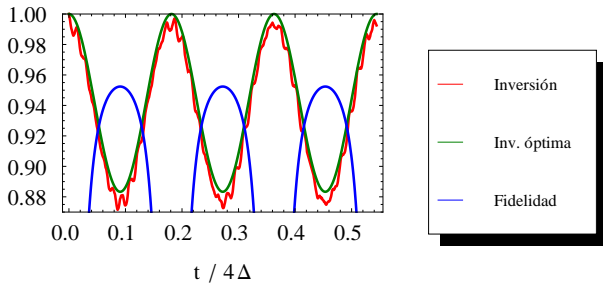
La fidelidad del estado de Fock bimodal, se define y se estima de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n_o, N_o, k}(\alpha, t) &\equiv |\langle n_o + 1, N_o + k | \psi(t) \rangle|^2 \Big|_{\eta=\eta_o=\eta_m} \\ &= \frac{\chi_{n_o, N_o}^2 \sin^2\left(\frac{R_{n_o, N_o, k}^+}{4\Delta} t\right)}{\chi_{n_o, N_o}^2 \sin^2\left(\frac{R_{n_o, N_o, k}^+}{4\Delta} t\right) + \sum \chi_{n, N}^2 \sin^2\left(\theta_{n, N, k}^+\right) \sin^2\left(\frac{R_{n, N, k}^+}{4\Delta} t\right)} \Big|_{\eta=\eta_o=\eta_m} \\ &\geq \frac{\sin^2\left(\frac{R_{n_o, N_o, k}^+}{4\Delta} t\right)}{\sin^2\left(\frac{R_{n_o, N_o, k}^+}{4\Delta} t\right) + 10^{-2\alpha} \sum_{(n, N) \neq (n_o, N_o)} \left(\frac{\chi_{n, N}^2}{\chi_{n_o, N_o}^2}\right)} \Big|_{\eta=\eta_o=\eta_m} \end{aligned} \quad (30)$$

En las figuras 2 y 3, se muestra un caso en el cual el ión inicia en estado excitado, y tanto la distribución fotónica como fonónica corresponden a estados inicialmente coherentes. Se observa que en la evolución del sistema, la observación del ión en su estado fundamental implicaría de inmediato la generación de un estado de Fock bimodal (preseleccionado) en la estadística fotón-fonón.

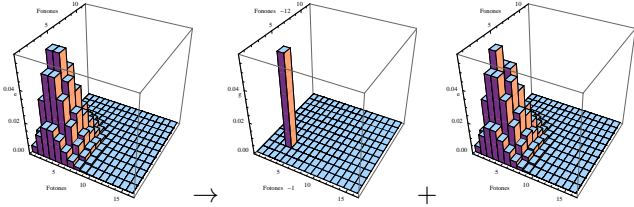


**Figura 2.** Estado preseleccionado:  $n_o = 3$ ,  $N_o = 2$ ,  $N_e = 10N_o$ ,  $k = 12$ ,  $\eta \simeq 0,6386$  ( $\alpha = 1,0$ ), Probabilidad máxima de encontrar en  $|g, 4, 14\rangle$  es 0,0606.

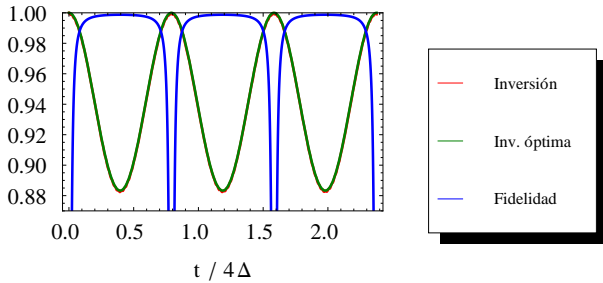


**Figura 3.** *Inversión*  $W_e^+(t)$  y *Fidelidad*  $\mathcal{F}_{n_o, N_o, k}(\alpha, t)$  con estado preseleccionado:  $n_o = 3$ ,  $N_o = 2$ ,  $N_e = 10N_o$ ,  $k = 12$ ,  $\eta \simeq 0,6386$  ( $\alpha = 1,0$ ). *Máxima fidelidad para el estado*  $|g, 4, 14\rangle$  es 0,9524.

Las figuras 4 y 5 muestran el caso previo pero con un mayor valor del parámetro  $\alpha$ , de tal forma que, la curva de inversión se superpone al caso óptimo y la fidelidad del estado bimodal es cercana al 100%.



**Figura 4.** *Estado preseleccionado:*  $n_o = 3$ ,  $N_o = 2$ ,  $N_e = 10N_o$ ,  $k = 12$ ,  $\eta \simeq 0,5477$  ( $\alpha = 1,8$ ), *Probabilidad máxima de encontrar en*  $|g, 4, 14\rangle$  es 0,0587.



**Figura 5.** *Inversión*  $W_e^+(t)$  y *Fidelidad*  $\mathcal{F}_{n_o, N_o, k}(\alpha, t)$  con estado preseleccionado:  $n_o = 3$ ,  $N_o = 2$ ,  $N_e = 10N_o$ ,  $k = 12$ ,  $\eta \simeq 0,5477$  ( $\alpha = 1,8$ ). *Máxima fide-*

*dad para el estado*  $|g, 4, 14\rangle$  es 0,9987.

## 5. Conclusiones

Respecto al proceso de eliminación adiabática, se estableció las condiciones específicas (y una escala de tiempo adecuada) para las cuales el sistema presentará una dinámica efectiva donde el nivel atómico  $|c\rangle$  no manifiesta un cambio significativo en su población. De manera formal, se puso en evidencia un régimen de adiabaticidad para el sistema en cuestión; sin embargo, será necesario un mayor estudio en esta área, i.e. se debe proponer un procedimiento más riguroso y cuantificar la estabilidad de dicho régimen.

Tanto por eliminación adiabática como por el método de serie de Dyson [1], se obtuvo el Hamiltoniano efectivo (21) del sistema. Dicho Hamiltoniano resulta una generalización del Hamiltoniano de Jaynes y Cummings, que satisface la conservación de energía y es restringido a la aproximación de onda rotante, tanto para el acoplamiento de los estados atómicos con la cavidad como con los estados de movimiento del propio ión. En este sentido, previo al Hamiltoniano efectivo (21) durante el proceso de eliminación adiabática se obtuvo el Hamiltoniano (17) sin la aproximación de onda rotante para los grados de libertad de movimiento; dicho resultado brinda la oportunidad para realizar un estudio, de la evolución del sistema, en un régimen extendido respecto al establecido por la aproximación de onda rotante (caso del acople con estados de movimiento).

Se muestra la posibilidad de obtener un estado de Fock bimodal preseleccionado, en la distribución fotón-fonón, con solo una medición oportuna del estado atómico del ión. Este proceso de interacción selectiva es resultado de ajustar algunos parámetros del sistema como las constantes de acoplamiento, frecuencia del láser y tiempos de interacción. Es necesario resaltar que además de los límites del propio sistema físico, para ajustar dichos parámetros, queda por establecer los límites debido a las condiciones que permiten la evolución efectiva del sistema de acuerdo al Hamiltoniano (21).

1. O. Miculich and E. Massoni, Dinámica efectiva para un ion atrapado en una cavidad QED, REVCUNI 14(1), 2011.
2. D. Meschede, H. Walther, and G. Muller, One-atom maser,"Phys. Rev. Lett., vol. 54, p. 551, 1985.
3. P. Munstermann, T. Fischer, P. Maunz, P. Pinkse, and G. Rempe, Dynamics of single-atom motion observed in a high-ness cavity, Phys. Rev. Lett., vol. 82, p. 3791, 1999.
4. H. Walther, B. Varcoe, B. Englert, and T. Becker, Cavity quantum electrodynamics, Rep. Prog. Phys., vol. 69, p. 1325, 2006.
5. D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger, The physics of quantum information. Germany: Springer, 2000.
6. D. Meekhof, C. Monroe, B. King, W. Itano, and D. Wineland, Generation of nonclassical motional states of a trapped atom,"Phys. Rev. Lett., vol. 76, p. 1796, 1996.
7. D. Leibfried, D. Meekhof, B. King, C. Monroe, W. Itano, and D. Wineland, Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom, Phys. Rev. Lett., vol. 77, p. 4281, 1996.
8. J. García-Ripoll, P. Zoller, and J. I. Cirac, Quantum information processing with cold atoms and trapped ions, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., vol. 38, p. S567, 2005.
9. L. A. Lugiato, P. Mandel, and L. M. Narducci, Adiabatic elimination in nonlinear dynamical systems, Phys. Rev. A, vol. 29, p. 1438, 1984.