



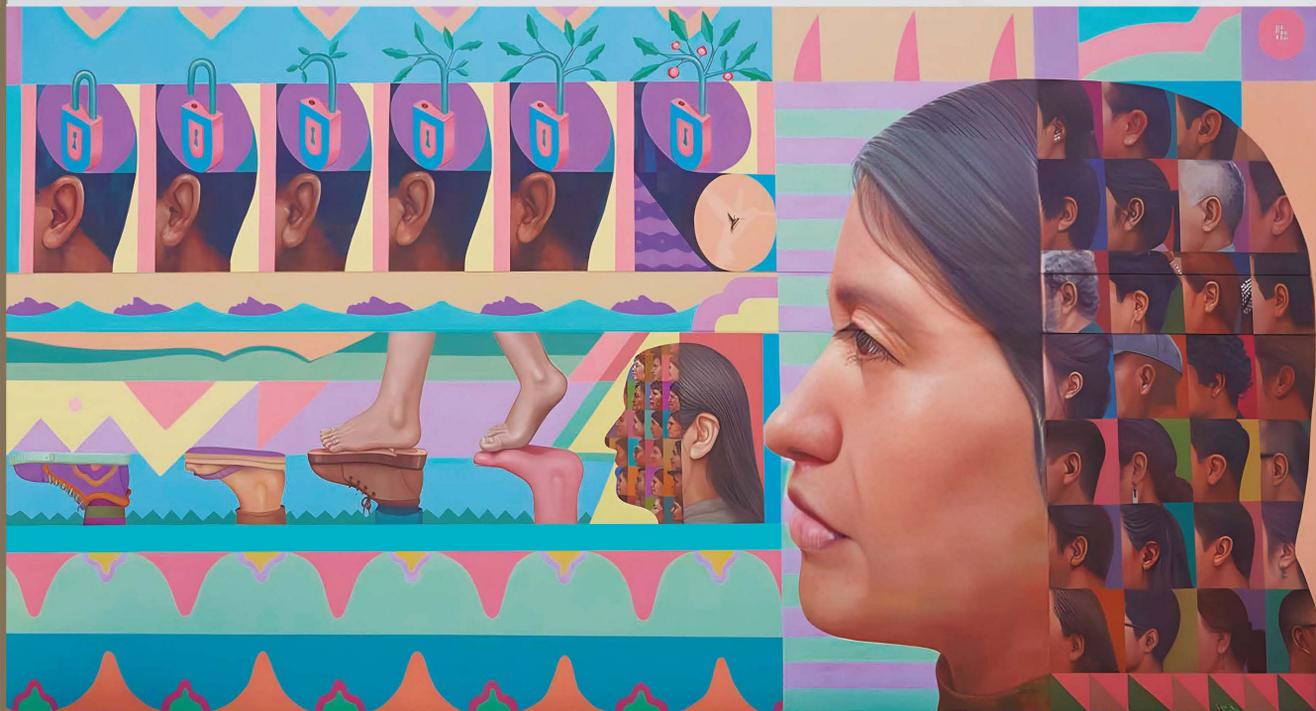
ISSN: 2961-2845 (Impresa)  
ISSN: 2788-7480 (En línea)

# revista iecos

Investigaciones Económicas y Sociales

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA, ESTADÍSTICA Y CIENCIAS SOCIALES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

VOL. 24 - N° 2 - JULIO - DICIEMBRE 2023



## Secciones

⊕ **Economía y Finanzas**

⊕ **Estadística Aplicada**

⊕ **Ciencias Sociales**

⊕ **Reseñas / Apuntes**



# revista iecos

**Investigaciones Económicas y Sociales**

**UNIDAD DE INVESTIGACIÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA, ESTADÍSTICA Y CIENCIAS SOCIALES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**



# revista iecos

Investigaciones Económicas y Sociales

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA, ESTADÍSTICA Y CIENCIAS SOCIALES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

VOL° 24 - N° 2 - JULIO - DICIEMBRE 2023 - LIMA - PERÚ

## RECTOR UNI

Dr. Pablo Alfonso López Chau Nava

## VICERRECTORA ACADÉMICA

Dra. Shirley Emperatriz Chilet Cama

## VICERRECTOR DE INVESTIGACIÓN

Arturo Fernando Talledo Coronado

## DECANO FIEECS

M. Sc. César Cetraro Cardó

## DIRECTOR UNIDAD DE INVESTIGACIÓN FIEECS

Mg. Rafael Vásquez Rodríguez

## DIRECTOR REVISTA IECOS

Dr. Víctor Carranza Elguera

## EDITORES ASOCIADOS

Ph.D. José Cerda Hernández. Universidad Nacional de Ingeniería- Perú

Dra. Edith Aranda Dioses. Universidad Nacional de Ingeniería- Perú

Dr. Alberto Rocha Valencia. Universidad de Guadalajara – México

Dr. Manuel González Navarrete. Universidad de la Frontera - México

M. Sc. Juan Contreras Varas. Pontificia Universidad Católica de Valparaiso - Chile

## EDITORES HONORARIOS:

Dra. Anne Marie Hockenghem. CNRS - Francia

Ph.D. José Salinas. Universidad Nacional de Ingeniería- Perú

## IMAGEN DE CARÁTULA :

Mural “Despertar en el camino”

Autor: Daniel Cortés

Depósito Digital N° 2023-07300

ISSN: 2961-2845 (Impresa)

ISSN: 2788-7480 (En línea)

©Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ingeniería Económica, Estadística y Ciencias Sociales

Av. Túpac Amaru 210, Lima - Perú

Correo: [iecos@uni.edu.pe](mailto:iecos@uni.edu.pe)

Web: <https://www.revistas.uni.edu.pe/index.php/iecos>



# revista iecos

Investigaciones Económicas y Sociales

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA, ESTADÍSTICA Y CIENCIAS SOCIALES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

VOL° 24 - N° 2 - JULIO - DICIEMBRE 2023 - LIMA - PERÚ

## CONTENIDO

❖ <b>EDITORIAL:</b>	
• Tecnología, economía y sociedad .....	4
❖ <b>ECONOMÍA Y FINANZAS</b>	
<b>WILLIAM SÁNCHEZ TAPIA</b>	
• Inversión en investigación y desarrollo y fluctuaciones macroeconómicas: un modelo de equilibrio general para una economía pequeña y abierta .....	7
<b>JENS H. E. CHRISTENSEN, LUIS CEBALLOS, DAMIAN ROMERO</b>	
• Estimaciones del tipo real natural basadas en el mercado: datos de los mercados de bonos latinoamericanos .....	25
❖ <b>ESTADÍSTICA APLICADA</b>	
<b>MARCO ALVES PEREIRA, BETSABÉ BLAS ACHIC</b>	
• Modelo de regresión binaria con mala clasificación y error de medición tipo Berkson con distribución t-STUDENT .....	61
<b>ROBERTO VILA</b>	
• Convergencia de procesos aleatorios unidimensionales .....	79
<b>MAGEN INFANTE ROJAS</b>	
• Análisis espacial de la asociatividad socioeducativa con el atraso y la deserción escolar en educación primaria regular por departamentos, Perú 2016 a 2021 .....	101
❖ <b>CIENCIAS SOCIALES</b>	
<b>NOEMÍ LIMA FUENTES</b>	
• De ingeniero fordista a ingeniero digital: caso de la formación tecnológica UNI en el Perú del siglo XXI. ....	135
<b>EDGARDO FIGUEROA DONAYRE</b>	
• Plan estratégico disruptivo de innovación para una universidad usando la "Casa de la Calidad" .....	160
❖ <b>APUNTES</b>	
• Instrucciones a los autores .....	183

# EDITORIAL:

## Tecnología, economía y sociedad

Heidegger advertía que la esencia de la tecnología no es tecnológica, sino social. Es en este sentido, que las sociedades modernas se dieron la tarea de organizar los datos de la realidad en una praxis definida como gestión del conocimiento para lograr el crecimiento económico y el desarrollo social. La consecuencia de este comportamiento que involucró a todos los sectores de la sociedad permitió el despliegue de la ciencia, la tecnología y la innovación como bases de la riqueza, el prestigio y el poder de las naciones.

En esta perspectiva histórica de la gestión del conocimiento, el papel que juegan el mundo intelectual y la universidad ha ido variando de acuerdo a las características nacionales. Daniel Mornet<sup>1</sup> nos ilustra que en Francia fue la academia la que apuntaló el desarrollo científico y tecnológico. En cambio, Christopher Hill<sup>2</sup> advierte que el desarrollo de la ciencia en Inglaterra fue obra de mercaderes y artesanos, no de doctores; y se desarrolló en los talleres de Londres, no en las aulas de Oxford y Cambridge, utilizando la lengua vernácula en vez del latín. Y añade: “Bacon asimiló, sintetizó y ofreció a los intelectuales este caudal de pensamiento popular, pero las esferas oficiales de Oxford y Cambridge se las arreglaron para seguir ignorándolo”. Hill muestra que cuando el Estado y las universidades inglesas se desvinculaban de las demandas del emergente sistema mercantil capitalista, el impulso del conocimiento científico y tecnológico fue asumido por la sociedad civil: artesanos, industriales, empresarios diversos.

En nuestro país, a diferencia de Francia o Inglaterra, ni la universidad ni la sociedad civil asumen la ciencia, la tecnología y la innovación como los medios más efectivos de su desarrollo. Corresponde revertir esta tendencia articulando a gobiernos, empresas, universidades y sociedad civil en una dinámica que haga de la gestión del conocimiento la base del desarrollo de las capacidades y de la mejora de la calidad de vida de la sociedad peruana. En este reto, corresponde a la Universidad Nacional de Ingeniería asumir su responsabilidad. Recordemos que la indiferencia es el peso muerto de la historia.

1 Mornet, Daniel (1985) Los orígenes intelectuales de la revolución francesa: 1715-1787. Edit. Paidós. Buenos Aires.

2 Christopher Hill (1980) Los orígenes intelectuales de la revolución inglesa. Edit. Crítica. Barcelona.



**Economía y  
Finanzas**



# Inversión en investigación y desarrollo y fluctuaciones macroeconómicas: Un modelo de equilibrio general para una economía pequeña y abierta

## Investment in research and development and macroeconomic fluctuations: A general equilibrium model for a small open economy

William Richard Sánchez Tapia

Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

### RESUMEN

Se construye un modelo de Ciclos Económicos Reales que incorpora un sector generador de Investigación y Desarrollo (I+D) a nivel de productos, con el fin de evaluar la importancia cuantitativa de ese sector en la dinámica macroeconómica de una economía pequeña y abierta como la peruana. Se encuentra que un sector innovador eficiente a nivel de productos juega un rol importante como “escudo” de la economía ante choques exógenos y es amplificador de la dinámica macroeconómica ante políticas de I+D. Así, el sector I+D logra reducir el impacto inicial sobre el crecimiento económico de un choque interno negativo en 0.6 puntos porcentuales y de un choque externo negativo en casi 2 puntos porcentuales respecto al caso en que no hay un sector I+D. Asimismo, un aumento del 1 por ciento en la innovación a nivel de productos (más variedades de productos en la economía) genera un mayor crecimiento del Producto Bruto Interno (PBI) en 0.35 puntos porcentuales, un incremento en el crecimiento del empleo en 0.20 puntos porcentuales y un aumento en el crecimiento de la productividad de la economía en 0.90 puntos porcentuales.

**Palabras Clave:** *Ciclos Económicos Reales, Investigación y Desarrollo, dinámica macroeconómica, economía pequeña y abierta, sector innovador eficiente.*

Recibido: 07/12/2022  
Aceptado: 08/12/2023  
Publicado: 30/12/2023

Correspondencia:  
william.sanchez.t@uni.pe  
<https://orcid.org/0000-0001-7767-5020>

Licencia:



Revista de la Facultad de  
Ingeniería Económica,  
Ingeniería Estadística y  
Ciencias Sociales de la  
Universidad Nacional de  
Ingeniería

## ABSTRACT

A model of Real Business Cycles that includes a sector that generates Research and Development (R&D) at the product level is estimated in order to assess the quantitative importance of this sector in the macroeconomic dynamics of a small and open economy like the Peruvian economy. It is found that an efficiently innovative product-level sector plays a crucial role as a “shield” for the economy against exogenous shocks and amplifies macroeconomic dynamics in the face of R&D policies. Thus, the R&D sector manages to mitigate the initial impact on economic growth arising from an adverse internal shock by 0.6 percentage points, and from an unfavorable external shock by 2 percentage points compared to the scenario without an R&D sector. Likewise, a 1 percent increase in innovation at the product level (more varieties of products in the economy) rises GDP growth by 0.35 percentage points, boosts employment growth by 0.20 percentage points, and increases the growth of the economy’s productivity by 0.90 percentage points.

**Keywords:** *Real Economic Cycles, Research and Development, macroeconomic dynamics, small and open economy, efficient innovative sector.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La inversión en investigación y desarrollo (I+D) desempeña un papel fundamental en el impulso del crecimiento económico sostenible a largo plazo, según Aghion et al. (1998). No obstante, la percepción de la inversión en I+D no se limita únicamente a ser un motor del progreso tecnológico; también se considera un elemento crucial que incide directamente en la creación de empleo, el aumento de la productividad y, en última instancia, en la estabilidad y dinámica de la economía a nivel macroeconómico (Comin & Gertler, 2006; Kung y Schmid, 2015).

En este contexto, el propósito de esta investigación es explorar la importancia de la inversión de I+D como un impulsor esencial de las fluctuaciones macroeconómicas. Se examinará cómo afecta tanto a la oferta como a la demanda, resaltando su papel no solo como generador de crecimiento a largo plazo, sino también como un componente crucial en la configuración de un entorno económico resistente y resiliente ante choques<sup>1</sup> internos y externos que puede enfrentar la economía.

---

1 Un choque económico es un evento exógeno y sorpresivo, como un desastre natural, un incremento no esperado de la productividad –gracias a la inclusión de una nueva tecnología revolucionaria– o un aumento del gasto público no esperado por los agentes económicos.

Para lograr el objetivo de este estudio, se hará uso de los modelos de equilibrio general, dinámicos y estocásticos (DSGE, por sus siglas en inglés<sup>2</sup>) puesto que son instrumentos valiosos para el análisis cuantitativo de tópicos macroeconómicos con un enfoque de corto a mediano plazo. Se caracterizan por incorporar la conducta de diversos agentes económicos que interactúan entre ellos en contextos de competencia perfecta o imperfecta. Los modelos DSGE permiten analizar las fluctuaciones económicas, es decir, desviaciones de corto o mediano plazo de variables macroeconómicas respecto a su tendencia de largo plazo o nivel potencial. Por lo general, la literatura económica ha clasificado los modelos de equilibrio general de acuerdo con la causa supuesta de la generación de las fluctuaciones económicas. Así, los modelos de ciclo económico real (conocidos también como modelos RBC por sus siglas en inglés<sup>3</sup>) suponen que choques reales o de oferta son los principales causantes de las desviaciones temporales del PBI, mientras que los modelos nekeynesianos asumen que choques nominales o de demanda, también pueden generar dichas fluctuaciones.

La ventaja de utilizar los modelos DSGE, y específicamente los modelos RBC, radica en que sirven para analizar el comportamiento de las principales variables macroeconómicas ante diversos choques económicos (funciones impulso respuesta), realizar ejercicios contrafactuales de política económica y generar proyecciones macroeconómicas. A pesar de su utilidad, estos modelos se han circunscrito principalmente al análisis de política monetaria o, en ciertos casos, de política fiscal, sin ampliar su espectro a temas cada vez más trascendentes en el análisis macroeconómico como son la productividad agregada, distribución de ingresos o la incorporación de un sector I+D.

En esta investigación se plantea ahondar en uno de estos nuevos tópicos, utilizando un modelo de equilibrio general para una economía pequeña y abierta –como es el caso peruano–, donde se incorpora un sector innovador a nivel de productos que interactúa con los agentes económicos. En otras palabras, la Productividad Total de Factores (PTF) se vuelve endógena, lo cual le hace dependiente de las condiciones económicas a partir de la introducción de un sector generador de nuevos productos derivados de la I+D. Modelos de este tipo ya han sido construidos para analizar cuestiones relacionadas con el crecimiento de largo plazo de la economía; sin embargo, ahora se incorpora un mecanismo similar al modelo de variedades de largo plazo en el estudio de la dinámica de corto y mediano plazo de la economía. Específicamente, en esta investigación se hará uso de un modelo RBC, al estilo de Aguiar y Gopinath

---

2 Dynamic stochastic general equilibrium modeling.

3 Real Business Cycles.

(2007), añadiendo un sector con competencia monopolística y un sector generador de innovación y desarrollo a nivel de productos, siguiendo de cerca los modelos de Comin y Gertler (2006), Kung y Schmid (2015) y Comin et al. (2009).

## 2. MARCO TEÓRICO

Los modelos DSGE se han utilizado para medir el impacto de la I+D en el crecimiento económico de la economía. Así, Hasumi et al. (2017), encontró que un shock tecnológico puro impulsado por las actividades de I+D representaba casi la mitad de la variación del PBI real, y que la variación restante se explicaba por los componentes del ciclo económico. En la misma línea, Pouraghaei (2016), mostró empíricamente de que la inversión en I+D provoca episodios de crecimiento en las pequeñas economías abiertas. Además, Hafeez et al. (2019), realizaron un análisis global de 60 países desarrollados y en desarrollo, encontrando una relación significativa y positiva entre el gasto en I+D y el crecimiento económico, lo que confirma las relaciones a largo y corto plazo. Asimismo, Christensen (2015) realizó un análisis cuantitativo del apoyo público a la I+D en la Unión Europea y mostró que el aumento del gasto público en este ámbito podría tener un impacto significativamente positivo en el crecimiento económico y el empleo.

Dentro de los modelos DSGE, los modelos RBC son los más utilizados para estudiar fluctuaciones macroeconómicas. Sin embargo, es importante señalar que modelos RBC originales fueron desarrollados y calibrados principalmente para países desarrollados como es el caso de Estados Unidos (Kydland & Prescott, 1982; Long & Plosser, 1983; mendoza, 1991; King & Rebelo, 1999). Es por ello, que en esta investigación se agregan nuevos elementos para estudiar características particulares de economías emergentes, pues los momentos de las variables macroeconómicas son totalmente diferentes en comparación de las economías desarrolladas.

En la presente investigación se propone un modelo RBC, al estilo de Aguiar y Gopinath (2007), y Ortiz y Wishart (2012), añadiendo un sector con competencia monopolística, que impulse a los empresarios que producen bienes intermedios diferenciados, y un sector generador de innovación y desarrollo a nivel de productos, siguiendo de cerca los modelos de Comin y Gertler (2006), Kung y Schmid (2015) y Comin et al. (2009). Esto permitirá estudiar las fluctuaciones macroeconómicas en una economía emergente como la peruana, en la que se considere un sector I+D.

A continuación, se detalla brevemente cada una de las investigaciones que se toman como base para el modelo propuesto en este artículo y posteriormente se describen los aspectos que se toman de cada uno de ellos. Aguiar y Gopinath (2007), construyeron un modelo de ciclos económicos reales para una economía emergente pequeña y abierta, donde existe la posibilidad de que los consumidores domésticos se financien con deuda internacional. Una particularidad del modelo de Aguiar y Gopinath es que incluye choques a la tendencia del PBI (o choques permanentes), con el objetivo de evaluar su importancia cuantitativa respecto a los choques transitorios de productividad, más usados en modelos de este tipo. Así, estos autores demuestran la importancia de los choques permanentes respecto a los choques transitorios en economías emergentes, aunque sucede lo contrario en economías pequeñas y desarrolladas. Posteriormente, el artículo de Aguiar y Gopinath fue ampliado para una muestra mayor de países, —la cual incluye Perú—, por Ortiz y Wishart (2012), en el cual encuentran que, adicionalmente a los choques permanentes, las fricciones financieras también son mecanismos importantes para cuantificar la dinámica de los ciclos económicos en economías emergentes.

No obstante, a pesar de que los modelos propuestos por Aguiar y Gopinath (2007) y Ortiz y Wishart (2012) fueron pioneros en la expansión de los modelos RBC para incluir economías emergentes, en ambos modelos los choques de productividad se consideran totalmente exógenos, por lo que la causa específica de un incremento repentino de la productividad —y por tanto del incremento del potencial de crecimiento de la economía—, no está explicada totalmente. En este sentido, la incorporación de un sector de I+D en tales modelos no solo contribuiría a endogenizar los choques de productividad, sino que también podría enriquecer el análisis de las fluctuaciones macroeconómicas en economías emergentes.

Algunos trabajos previos han endogenizado la PTF en función de las condiciones económicas, pero centrándose en estudiar ciclos económicos en países desarrollados. Así, Comin y Gertler (2006) identificaron lo que denominan ciclos de mediano plazo, que se definen como la suma de variaciones de alta y mediana frecuencia del PBI, y observan una alta correlación positiva (movimientos procíclicos) entre esta variable e indicadores de cambio tecnológico, investigación y desarrollo y eficiencia en la utilización de recursos, para posteriormente desarrollar un modelo que incorpore estas características y sea consistente con los hechos macroeconómicos observados en la economía americana tanto en el corto como en el mediano plazo. En línea con esta última investigación, en Comin et al. (2009), se desarrolla un modelo donde choques al potencial de crecimiento económico son las principales fuerzas impulsoras

del ciclo económico, aunque esta dinámica incorpora un costo de adopción tecnológica. Los autores demostraron que incorporar un mecanismo de adopción tecnológica endógena juega un rol importante en la amplificación de choques macroeconómicos.

Otra forma de modelar productividad endógena se observa en Bianchi et al. (2019), donde los autores construyen y estiman un modelo de ciclos económicos con crecimiento endógeno y difusión tecnológica, de manera que observan que las externalidades generadas por la I+D son importantes para relacionar las fluctuaciones de corto plazo con el crecimiento de largo plazo de la economía. Asimismo, logran identificar la dinámica de la difusión tecnológica durante la crisis financiera de los años 2007-2008 y la capacidad que tiene el mecanismo de productividad endógena para generar comovimientos positivos entre el consumo y la inversión. En esa línea, el estudio de Anzoátegui et al. (2019) examina la caída de la productividad después de la crisis financiera de los años 2007-2008 y la relaciona con una respuesta endógena de la economía. Asimismo, la prociclicidad de la I+D, es decir, la correlación positiva entre el gasto en I+D y el PBI, es estudiado en Barlevy (2007), donde se argumenta que dicha característica se explica por una externalidad dinámica inherente al proceso de I+D que hace que los agentes de este sector tengan una visión de corto plazo y se guíen por el ambiente macroeconómico en general.

Como se ha evidenciado, se han desarrollado modelos para analizar los ciclos económicos en economías emergentes, aunque en su mayoría mantienen el supuesto de que la Productividad Total de Factores (PTF) es completamente exógena. En contraste, algunas investigaciones han logrado endogenizar la productividad mediante la incorporación del sector I+D, aunque dichos modelos han sido principalmente aplicados a países desarrollados.

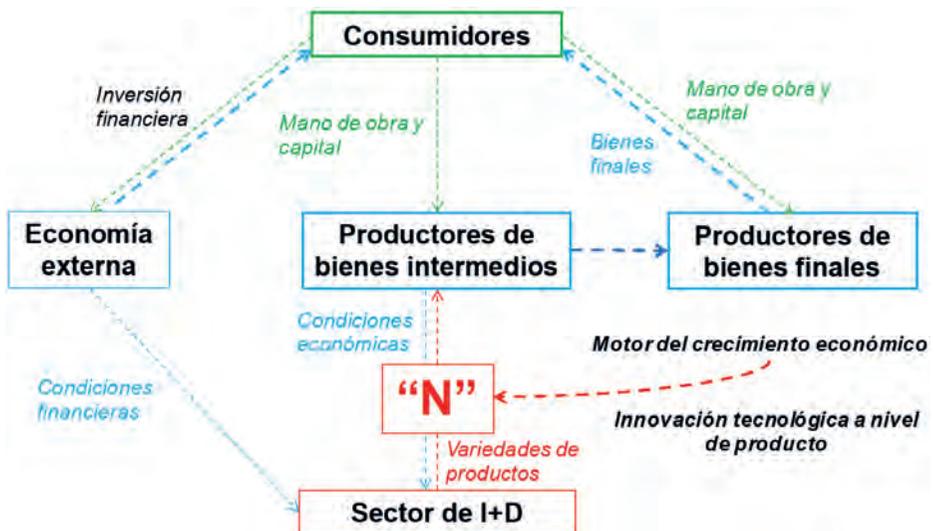
En este contexto, el presente artículo se propone integrar los modelos RBC adaptados para economías emergentes, incorporando simultáneamente un sector I+D. De esta manera, se pretende modelar de forma endógena la PTF. El enfoque de esta investigación busca llenar la brecha existente al ofrecer un marco que permita examinar el papel del sector I+D y su influencia en las fluctuaciones macroeconómicas en países emergentes.

### 3. EL MODELO

El modelo empleado es uno de ciclo económico real (RBC, por sus siglas en inglés), dado que asume que las fluctuaciones económicas son generadas por choques reales o de oferta. Desde un punto de vista tradicional, el modelo es

un RBC de dos sectores, uno de productores de bienes intermedios, que actúan en competencia imperfecta o monopolística, y el otro de productores de bienes finales, que se encuentran en un ambiente de competencia perfecta. Asimismo, existen hogares que consumen los bienes finales y ofertan mano de obra, además de tener acceso a financiamiento internacional. Finalmente, la particularidad del modelo es que la productividad agregada de la economía depende de las condiciones económicas. Ello se logra mediante la inclusión de un sector generador de innovación y desarrollo a nivel de productos que, como su propio nombre lo indica, genera nuevas variedades de productos en la economía, originando con ello el crecimiento económico. Estas nuevas variedades son vendidas por los productores de bienes intermedios. En la Figura 1 se presenta un esquema resumido de los agentes del modelo y sus interacciones.

**Figura 1.**  
*Modelo RBC con un sector generador de I+D*



### 3.1 LOS CONSUMIDORES

Los consumidores u hogares consumen bienes finales,  $C_t$ , y ofertan mano de obra,  $L_t$ , en un mercado competitivo. Asimismo, son dueños del capital de la economía,  $K_t$ , y pueden ahorrar en instrumentos financieros (bonos) de la economía externa,  $B_t$ . Por otra parte, también son dueños de los productores de bienes intermedios, por lo que reciben los beneficios -neto de

impuestos- de parte de estas firmas,  $\Pi_t - T_t$ . El programa de optimización de los consumidores es el siguiente:

$$\text{Max}_{\{C_t, L_t, K_{t+1}, B_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{[C_t^\gamma (1 - L_t)^{1-\gamma}]^{1-\sigma}}{1 - \sigma}$$

Sujeto a:

$$C_t + K_{t+1} = Y_t + (1 - \delta)K_t - \frac{\phi_K}{2} \left( \frac{K_{t+1}}{K_t} - \exp^{\mu_N} \right)^2 K_t + \Pi_t - T_t - B_t + q_t B_{t+1}$$

Donde  $Y_t$  es el ingreso de la economía -el PBI- y  $q_t$  es el “precio” del financiamiento externo, que se define de la siguiente manera:

$$\frac{1}{q_t} = 1 + r_t^* + \psi^* [\exp^{(B_{t+1} - B)} - 1]$$

Siendo  $r_t^*$  es la tasa de interés internacional, que se modela como un proceso exógeno,  $B$  es el valor de estado estacionario de la deuda de la economía y  $\Psi^*$  es un parámetro que mide la sensibilidad del costo del financiamiento externo al nivel de deuda del país.

### 3.2 LOS PRODUCTORES DE BIENES INTERMEDIOS

Existe un continuo de firmas con poder monopólico indexadas por  $i$ . Cada una de ellas tiene la capacidad de establecer precios,  $P_t^{i,X}$ , por encima del que existiría en un mercado competitivo. Para producir bienes intermedios,  $X_t^i$ , cada uno de estos productores utiliza bienes finales que se consiguen a un costo marginal unitario. Estos agentes maximizan sus beneficios, representados por la siguiente ecuación:

$$\Pi_t^i = P_t^{i,X} X_t^i (P_t^{i,X}) - X_t^i (P_t^{i,X})$$

Donde  $X_t^i (P_t^{i,X})$  es la demanda de bienes intermedios del  $i$ -ésimo productor.

### 3.3 LOS PRODUCTORES DE BIENES FINALES

Estas firmas actúan en un ambiente de competencia perfecta. Utilizan el capital y la mano de obra de los consumidores conjuntamente con un compuesto de bienes intermedios,  $M_t$ , para producir los bienes finales,  $Y_t$ . La

tecnología de producción es la siguiente:

$$Y_t = [A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}]^{1-\epsilon} M_t^\epsilon$$

Donde  $A_t$  es la productividad total de factores, modelada mediante un proceso exógeno, mientras que  $\alpha$  es la participación del capital en la producción y  $M_t$  es un compuesto CES de bienes intermedios diferenciados,  $X_t^i$ , cuya importancia en el proceso productivo se cuantifica a través del parámetro  $\epsilon$ . Tomando en cuenta que  $N_t$  es el número total de bienes intermedios de la economía que son usados en la producción de bienes finales, el compuesto CES de bienes intermedios se define así:

$$M_t = \left[ \int_0^{N_t} (X_t^i)^{\frac{1}{v}} di \right]^v$$

Siendo  $i$  el indicador de firmas de bienes intermedios, tal que  $i \in [0, N_t]$ , y  $v$  es la elasticidad de sustitución entre bienes intermedios. El beneficio del productor de bienes finales está representado en la siguiente ecuación:

$$\Omega_t = [A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}]^{1-\epsilon} \left[ \int_0^{N_t} (X_t^i)^{\frac{1}{v}} di \right]^{v\epsilon} - R_t^k K_t - W_t L_t - \int_0^{N_t} P_t^{i,X} X_t^i di$$

Se debe tener en cuenta que  $R_t^k$  es el costo de uso del capital por parte de estas firmas y  $W_t$  es el salario real por la mano de obra utilizada. En ese sentido, estos productores elegirán las cantidades óptimas de capital, trabajo y bienes intermedios que maximizan sus beneficios, sujeto a la tecnología de producción utilizada.

### 3.4 EL SECTOR GENERADOR DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO A NIVEL DE PRODUCTOS

Los nuevos productos son desarrollados a través de la Innovación y Desarrollo. El número de nuevos bienes intermedios en la economía evoluciona de la siguiente manera:

$$N_t = \psi_t S_t - \phi_N N_{t-1} + \tau_t$$

Donde  $S_t$  representa las unidades de producción que se desvían hacia este sector o, en otras palabras, el gasto real del sector I+D en la economía;  $\psi_t$  es la productividad del sector I+D en la generación de nuevos productos,

$\phi_N$  es un parámetro que mide la tasa de supervivencia de los bienes intermedios entre períodos y  $t_t$  es un choque de innovación tecnológica a nivel de productos, modelado como un proceso exógeno. Un incremento repentino e inesperado de  $t_t$  implica un aumento en el número de bienes intermedios de la economía que genera, a su vez, mayor producción en el mediano plazo. Se asume que  $\psi_t$  depende tanto del número actual de productos en la economía, así como de las unidades de producción destinadas hacia el sector, mediante la siguiente ecuación:

$$\psi_t = \chi \left( \frac{N_t}{S_t} \right)^{1-\eta}$$

Siendo  $X$  un parámetro de escala y  $n$  la elasticidad de los nuevos bienes intermedios respecto al gasto en I+D, tal que  $n \in [0,1]$ . Finalmente, el sector generador de I+D es de libre entrada, por lo que se cumple la siguiente condición de arbitraje:

$$E_t[q_{t+1}V_{t+1}] = \frac{1}{\psi_t}$$

Donde  $V_t$  es el valor actual de los nuevos productos elaborados, que se define de la siguiente manera:

$$V_t = (v - 1)X_t + (1 - \phi_N)q_{t+1}V_{t+1}$$

Siendo  $X_t$  el agregado de bienes intermedios de la economía.

### 3.5 PROCESOS EXÓGENOS

Son tres los procesos exógenos presentes en el modelo: un choque doméstico de oferta, un choque externo y un choque de innovación tecnológica a nivel de productos. Estos se describen, respectivamente, en las siguientes tres ecuaciones:

$$A_t = \rho_A A_{t-1} + \epsilon_t^A$$

$$r_t^* = \rho_{r^*} r_{t-1}^* + \epsilon_t^{r^*}$$

$$\tau_t = \rho_\tau \tau_{t-1} + \epsilon_t^\tau$$

Donde  $\epsilon_t^A \sim N(0, \sigma_A^2)$ ,  $\epsilon_t^{r^*} \sim N(0, \sigma_{r^*}^2)$  y  $\epsilon_t^\tau \sim N(0, \sigma_\tau^2)$ .

### 3.6 CALIBRACIÓN

Para el caso del sector macroeconómico “tradicional”, se siguió la calibración de Ortiz y Wishart (2012)<sup>4</sup>. Para el sector I+D, se utilizó la calibración de Kung y Schmidt (2015)<sup>5</sup>, donde X es el parámetro de escala que se modifica para llegar a niveles de I+D como porcentaje del PBI observados en la realidad peruana<sup>6</sup>.

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Una vez calibrado el modelo y obtenida su solución numérica, se realizaron algunos ejercicios que permitieron obtener conclusiones cuantitativas sobre la importancia macroeconómica de un sector innovador eficiente<sup>7</sup>. Principalmente, se analizó el modelo cuando se enfrentó a tres choques: un choque doméstico de oferta, un choque externo y un choque de innovación tecnológica. En resumen, un sector innovador eficiente:

Tiene un significativo impacto sobre las principales variables macroeconómicas en el mediano plazo.

Es amortiguador de choques negativos en el corto plazo.

A continuación, se plantea el análisis de los diversos choques que afectan el modelo, el mecanismo de transmisión inherente a cada uno de ellos y los resultados cuantitativos de los ejercicios que se interpolan al utilizar el ejemplo peruano. Es importante mencionar que los resultados se enfocan en la dinámica del PBI y se utilizan dos escenarios: (i) cuando el modelo no cuenta con un sector innovador a nivel de productos —es decir, un modelo a lo Aguiar y Gopinath (2007)— y (ii) cuando la economía sí posee un sector I+D. De esta manera se puede cuantificar la importancia macroeconómica del sector innovador a nivel de productos.

### 4.1 CHOQUE DOMÉSTICO DE OFERTA NEGATIVO

De acuerdo con la Figura 2, en términos cuantitativos, un sector I+D eficiente reduce el impacto inicial de un choque doméstico negativo sobre el PBI en torno a 20% respecto al caso en que no hay un sector I+D. Este diferencial se mantiene en promedio durante los próximos cinco (5) años después de haberse producido el mencionado choque.

---

4 Para mayor detalle ver Tabla 1 (Pg. 9) de Ortiz y Wishart (2012).

5 Para mayor detalle ver Tabla 1 (Pg. 35) del Apéndice A de Kung y Schmidt (2015).

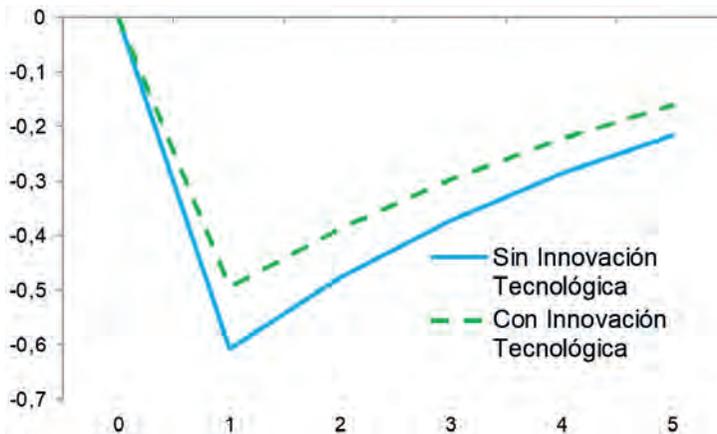
6 De acuerdo con el Banco Mundial, la inversión en investigación y desarrollo en el Perú equivale en torno a 0.2% de su PBI.

7 Un sector innovador es eficiente si todo lo que gasta sirve para producir nuevas variedades en la economía.

Este efecto numérico, generado por la presencia del sector de I+D, puede ser interpretado también en términos de efecto en las tasas de crecimiento del PBI. Tomemos como ejemplo un choque doméstico negativo, como un Fenómeno de El Niño de magnitud severa, que podría disminuir el crecimiento del PBI en 3 puntos porcentuales<sup>8</sup>. En este contexto, la presencia de un sector innovador eficiente reduce el impacto de los choques domésticos negativos en 0.6 puntos porcentuales<sup>9</sup>.

El mecanismo de transmisión sería la siguiente, un choque de este tipo disminuye la productividad de la economía directamente. Ello genera una recesión económica que se traduce en una caída en la demanda de los factores productivos, que son el trabajo y el capital físico. Esta menor demanda no sólo reduce la producción de bienes finales sino también la de bienes intermedios. La caída del capital físico se traduce en un incremento de su productividad marginal<sup>10</sup> y, por tanto, en una mayor rentabilidad de las innovaciones, lo que incentiva la entrada de más actores al sector generador de I+D. El número creciente de “innovadores” provoca, a su vez, un incremento en el número de nuevos productos que se introducen a la economía, lo que sirve como amortiguador del choque negativo inicial. En otras palabras, un sector innovador eficiente actúa como “escudo” de la economía ante una caída no esperada de la productividad agregada.

**Figura 2.**  
*Respuesta del PBI a un evento negativo*



Nota. eje de las abscisas se encuentra en años.

8 Ver, por ejemplo, el Marco Macroeconómico Multianual 2012-2014.

9 El cálculo es el siguiente:  $20\% \times 3$  puntos porcentuales = 0,6 puntos porcentuales.

10 Debido a que la función de producción utilizada tiene retornos decrecientes por cada factor y retornos constantes a escala.

## 4.2 CHOQUE EXTERNO NEGATIVO

En la Figura 3 se puede observar el rol amortiguador del sector I+D en la dinámica del PBI ante un choque externo negativo. Así, un sector I+D eficiente reduce el impacto inicial de un choque externo en 25% respecto al caso en que no hay un sector I+D.

Traduciendo este resultado cuantitativo a tasas de crecimiento del PBI, y tomando en cuenta lo observado durante la crisis financiera internacional, si el sector de generación de I+D peruano fuera eficiente, el crecimiento económico en el año 2009 (año en el que ocurrió un choque externo negativo) no hubiese sido de 1.1% sino alrededor de 3.1%<sup>11</sup>.

Esto quiere decir que un sector de innovación a nivel de producto reduce el efecto de un choque externo negativo sobre el crecimiento económico en 2 puntos porcentuales respecto al caso en que no hay un sector I+D. Sin embargo, es importante resaltar que el efecto amortiguador solo se da en el año uno luego de haberse dado el choque externo negativo.

El mecanismo de transmisión sería la siguiente, un choque de este tipo se explica mediante el incremento inesperado del diferencial de tasas de interés ( $r_t^k - r_t^*$ )<sup>12</sup>, lo que genera una apreciación cambiaria real que reduce las exportaciones y, con ello, el PBI.

Ante la menor dinámica económica nacional y el abaratamiento relativo del crédito externo los productores empiezan a demandar mayor financiamiento en la economía foránea para sus operaciones. La posibilidad de obtener financiamiento internacional incrementa la rentabilidad esperada de las innovaciones a nivel de producto, aumentando el número de participantes en el sector I+D eficiente y generando con ello un mayor número de variedades de productos en la economía. En otras palabras, se produce una especie de “migración” productiva desde el sector orientado al mercado externo hacia el sector generador de I+D, dado el incremento del costo de financiamiento doméstico.

El punto importante es que el traslado de los recursos productivos hacia el sector innovador incrementa las posibilidades de introducir nuevos pro-

---

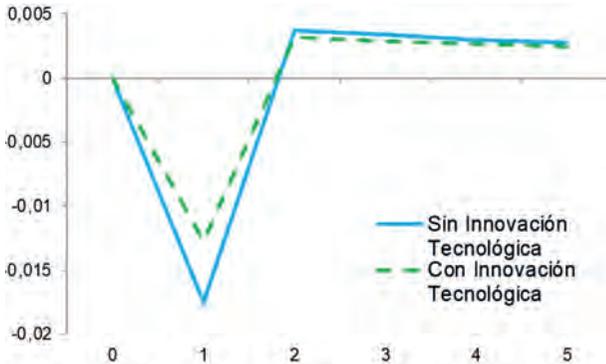
11 La Crisis Financiera Internacional desaceleró la economía peruana de manera significativa, llevando a que se pase de un crecimiento de 9,1% en 2008 a 1,1% en el 2009. Así la desaceleración fue de -8 puntos porcentuales. De tener un sector I+D eficiente significaría que esa desaceleración sea del 25% menos, es decir, de 2 puntos porcentuales menos (25%\*-8 puntos porcentuales).

12 Donde  $r_t^k = R_t^k - \delta$ .

ductos en esta economía. Este efecto también actúa como escudo macroeconómico ante un choque externo negativo.

**Figura 3.**

*Respuesta del PBI a un evento negativo externo*



Nota. eje de las abscisas se encuentra en años.

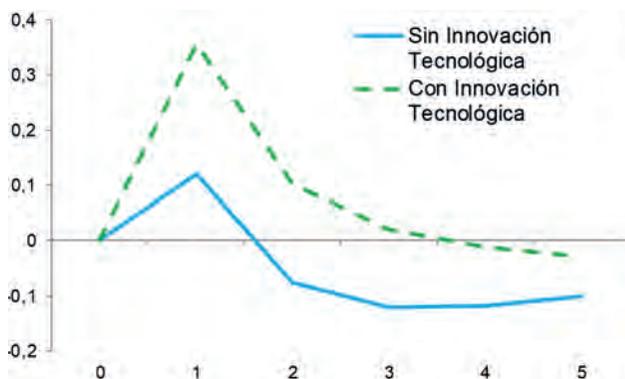
## 4.2 CHOQUE DE INNOVACIÓN TECNOLÓGICA

Un choque de este tipo se traduce en un incremento repentino en el número de variedades de la economía, lo que dinamiza el crecimiento económico. Una mayor producción implica, a la vez, la posibilidad de un mayor gasto en I+D, lo que incentiva la entrada de nuevos participantes al sector generador de I+D, generando con ello un círculo virtuoso en la producción económica.

En términos numéricos, un sector I+D eficiente incrementa el impacto positivo inicial de la innovación a nivel de productos. Por un aumento del 1% en la innovación (más variedades en la economía), el crecimiento del PIB aumenta 0.35 puntos porcentuales más con un sector I+D eficiente, el crecimiento del empleo lo hace en 0.20 puntos porcentuales más y el crecimiento de la productividad de la economía en 0.90 puntos porcentuales más. Asimismo, es importante destacar que, en una economía con un sector innovador eficiente, el impacto persiste incluso hasta tres (3) años luego de haberse dado el choque, escenario que no se observa en una economía que no tiene un sector I+D.

**Figura 4.**

*Respuesta del PBI a un incremento en la innovación tecnológica a nivel de productos*



Nota. eje de las abscisas se encuentra en años.

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De acuerdo con lo mostrado líneas arriba, y teniendo en cuenta la naturaleza de los choques simulados, se concluye que la importancia cuantitativa macroeconómica de un sector generador de I+D eficiente a nivel de productos se explica por su rol: (i) amortiguador de choques negativos (internos y externos) sobre la economía nacional, y (ii) amplificador de la dinámica de las variables macroeconómicas ante políticas de innovación tecnológica a nivel de productos.

Así, el sector I+D logra reducir el impacto inicial sobre el crecimiento económico de un choque interno negativo en 0.6 puntos porcentuales y de un choque externo negativo en 2 puntos porcentuales en comparación a una economía sin sector I+D. Asimismo, en una economía con un sector I+D eficiente, un aumento del 1 por ciento en la innovación a nivel de productos (más variedades de productos en la economía) genera un mayor crecimiento del Producto Bruto Interno (PBI) en 0.35 puntos porcentuales, un incremento en el crecimiento del empleo en 0.20 puntos porcentuales y un aumento en el crecimiento de la productividad de la economía en 0.90 puntos porcentuales.

Dados los resultados, se recomienda impulsar la inversión en I+D porque no solo permite generar mayor crecimiento económico de mediano y largo plazo, sino también atenuar los efectos negativos de distintos choques que enfrenta

una economía (internos y externos). En este sentido, en un escenario de elevada incertidumbre y con fuerte desaceleración del crecimiento potencial de la economía, es clave generar las condiciones necesarias para que el sector privado tenga los incentivos invertir en mayor magnitud en investigación y desarrollo.

Como agenda de investigación, en términos de modelamiento macroeconómico, el modelo propuesto en esta investigación todavía puede extenderse en línea con el desarrollo de la literatura sobre el tema. En ese sentido, se puede incluir no sólo un bloque generador de I+D sino también un sector adaptador del mismo que permita agregar mayor persistencia a las variables ante choques exógenos; inclusive se puede ampliar el modelo hacia uno de estilo neokeynesiano, incorporando fricciones nominales y endogenizando la productividad total de factores.

Asimismo, sería importante incorporar política fiscal dentro del modelo propuesto para poder estudiar el rol que desempeñan las políticas gubernamentales en la promoción de la inversión en I+D y en la mitigación de las fluctuaciones macroeconómicas. Así, podría estudiarse en mayor detalle el impacto de incentivos fiscales, subsidios y regulaciones efectivas y cómo estas pueden influir en el comportamiento de las empresas y en la dirección de la inversión en investigación y desarrollo en la economía.

## 6. REFERENCIAS

- Aghion, P., Howitt, P., Brant-Collett, M., & García-Peñalosa, C. (1998). *Endogenous growth theory*. MIT press.
- Aguiar, M., & Gopinath, G. (2007). Emerging market business cycles: The cycle is the trend. *Journal of political Economy*, 115(1), 69-102.  
<https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/511283>
- Anzoategui, D., Comin, D., Gertler, M., & Martinez, J. (2019). Endogenous technology adoption and R&D as sources of business cycle persistence. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 11(3), 67-110. <https://doi.org/10.1257/mac.20170269>
- Barlevy, G. (2007). On the cyclicity of research and development. *American Economic Review*, 97(4), 1131-1164. <https://doi.org/10.1257/aer.97.4.1131>
- Bianchi, F., Kung, H., & Morales, G. (2019). Growth, slowdowns, and recoveries. *Journal of Monetary Economics*, 101, 47-63.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmoneco.2018.07.001>
- Christensen, M. A. (2015). The Economic Impact of Increasing Public Support to ICT R&D: A Modelling Approach. *Research Papers in Economics*, (JRC97907).  
<https://doi.org/10.2791/94496>
- Comin, D., & Gertler, M. (2006). Medium-term business cycles. *American Economic Review*, 96(3), 523-551. <https://doi.org/10.1257/aer.96.3.523>
- Comin, D. A., Gertler, M., & Santacreu, A. M. (2009). *Technology innovation and diffusion as sources of output and asset price fluctuations* (No. w15029). National Bureau of Economic Research. <https://www.nber.org/papers/w15029>
- Hafeez, A., Syed, K. B. S., & Qureshi, F. (2019). Exploring the Relationship between Government R & D Expenditures and Economic Growth in a Global Perspective: A PMG Estimation Approach. *International Business Research*, 12(4), 163-174.  
<https://doi.org/10.5539/ibr.v12n4p163>
- Hasumi, R., Iiboshi, H., & Nakamura, D. (2017). R&D Growth and Business Cycles Measured with an Endogenous Growth DSGE Model. MPRA, (85525).  
<https://mpra.ub.uni-muenchen.de/85525/>
- King, R. G., & Rebelo, S. T. (1999). Resuscitating real business cycles. *Handbook of macroeconomics*, 1, 927-1007. [https://doi.org/10.1016/S1574-0048\(99\)10022-3](https://doi.org/10.1016/S1574-0048(99)10022-3)
- Kung, H., & Schmid, L. (2015). Innovation, growth, and asset prices. *The Journal of Finance*, 70(3), 1001-1037. <https://doi.org/10.1111/jofi.12241>

- Kydland, F. E., & Prescott, E. C. (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 50(6), 1345-1370. <https://doi.org/10.2307/1913386>
- Long Jr, J. B., & Plosser, C. I. (1983). Real business cycles. *Journal of political Economy*, 91(1), 39-69. <https://doi.org/10.1086/261128>
- Mendoza, E. G. (1991). Real business cycles in a small open economy. *The American Economic Review*, 81(4), 797-818. <https://www.jstor.org/stable/2006643>
- Ortiz, A., & Wishart, J. (2012). Trend Shocks and Financial Frictions in Small Open Economies Modeling (No. 5). CEMLA. <https://econpapers.repec.org/paper/cmldocinv/5.htm>
- Pouraghaei, N. (2016). Testing a DSGE endogenous growth model of R&D via indirect inference: productivity growth in a panel of OECD [Thesis to obtain the degree of Doctor of Philosophy]. Cardiff University. Cardiff Business School. Economics Section. <https://orca.cardiff.ac.uk/id/eprint/100707>

## Estimaciones de mercado de la tasa de interés real natural: Evidencia de los mercados de bonos latinoamericanos

### Market-based estimates of the natural real rate: Evidence from latin american bond markets

Luis Ceballos<sup>1</sup>, Jens H. E. Christensen<sup>2</sup>, Damian Romero<sup>3</sup>

#### RESUMEN

Proporcionamos estimaciones basadas en el mercado de bonos para la tasa real natural, es decir, la tasa de interés real a corto plazo en estado estacionario, para Brasil, Chile y México. Nuestro enfoque utiliza un modelo financiero dinámico de la estructura de tasas de interés estimado directamente sobre los precios de los bonos individuales indexados a la inflación ajustados por las primas de liquidez específicas de los bonos y premios por plazo. En primer lugar, observamos que las primas de liquidez de los bonos indexados a la inflación en los tres países son considerables y varían significativamente. En segundo lugar, observamos grandes diferencias en sus tasas de interés reales de equilibrio: el de Brasil es alto y volátil, el de México estable pero elevado, mientras que el de Chile es bajo y ha caído de forma persistente. Aunque inciertas, nuestras estimaciones tienen importantes implicancias para la conducción de la política monetaria en estos tres países.

**Palabras clave:** *modelo de estructura temporal libre de arbitraje afin, fricciones en el mercado financiero, política monetaria, rstar*

Recibido: 15/12/2023  
Aceptado: 17/12/2023  
Publicado: 30/12/2023

<sup>1</sup> University of San Diego,  
San Diego, Estados Unidos  
Correspondencia:  
[luisceballos@sandiego.edu](mailto:luisceballos@sandiego.edu)  
<https://orcid.org/0000-0002-8287-3782>

<sup>2</sup> Federal Reserve Bank of  
San Francisco, San Fran-  
cisco, Estados Unidos  
Correspondencia:  
[jens.christensen@sf.frb.org](mailto:jens.christensen@sf.frb.org)  
<https://orcid.org/0000-0001-7494-2736>

<sup>3</sup> Central Bank of Chile,  
Santiago, Chile  
Correspondencia:  
[dromeroc@bcentral.cl](mailto:dromeroc@bcentral.cl)  
<https://orcid.org/0000-0002-0139-3454>

Licencia:



Revista de la Facultad de  
Ingeniería Económica,  
Ingeniería Estadística y  
Ciencias Sociales de la  
Universidad Nacional de  
Ingeniería

## ABSTRACT

For Brazil, Chile, and Mexico, we offer market-based estimates of the natural real rate, or the steady-state short-term real interest rate. Our methodology makes use of a dynamic term structure finance model that is directly estimated from the prices of individual inflation-indexed bonds, adjusting for real term premia and bond-specific liquidity. First, we discover that there is substantial heterogeneity in the inflation-indexed bond liquidity premia across all three nations. Second, we discover significant variations in their projected equilibrium real rates: Chile's is low and has been declining steadily, Mexico's is constant but high, and Brazil's is huge and erratic. Our estimates, albeit imprecise, may have significant effects on how monetary policy is implemented in these three nations.

JEL Classification: C32, E43, E52, G12

**Keywords:** *affine arbitrage-free term structure model, financial market frictions, monetary policy, rstar*

## 1. INTRODUCCIÓN

Una idea fundamental y ampliamente reconocida en economía es la tasa real de equilibrio. Para los inversores, las previsiones de los futuros tasas de descuento utilizados para valorar los activos están ancladas en el nivel de equilibrio de la tasa real a corto plazo (por ejemplo, Clarida, 2014). El equilibrio, también conocido como tasa de interés natural, sirve de patrón neutro para que investigadores y responsables políticos calibren la orientación de la política monetaria: Si la tasa de interés real a corto plazo es superior a la tasa natural, la política monetaria es contractiva; si es inferior, es expansiva. Para poner en práctica directrices de política monetaria bien conocidas, como la regla de Taylor, también se necesita una estimación fiable de la tasa real de equilibrio<sup>4</sup>.

Mientras que la mayoría de las estimaciones existentes de esta variable económica clave se extraen de modelos y datos macroeconómicos, nosotros en cambio seguimos a Christensen y Rudebusch (2019, en adelante CR) y utilizamos modelos financieros. Específicamente, nos basamos en los precios de los bonos indexados a la inflación de tres importantes países latinoamericanos, Brasil, Chile y México, para nuestro análisis y, por lo tanto, ofrecemos una perspectiva única de los mercados emergentes sobre las tendencias recientes de la tasa real natural<sup>5</sup>.

---

4 Para la investigación sobre el papel de la tasa natural en la política monetaria, véase Rudebusch (2001), Orphanides y Williams (2002), Eggertsson et al. (2016) y Hamilton et al. (2016), entre muchos otros.

5 Nuestro análisis difiere del de Blake et al. (2015), que analizan estimaciones de primas nominales por plazo de múltiples países latinoamericanos, incluidos los tres países aquí considerados, en que se basan en rendimientos sintéticos ajustados de bonos cupón cero para las estimaciones de sus modelos.

Observamos que estos valores compensan a los inversores por la pérdida de poder adquisitivo resultante de la inflación de los precios internos, ya que sus pagos de cupón y principal están vinculados al índice de precios al consumo (IPC) de cada nación<sup>6</sup>. En consecuencia, sus precios reflejan directamente los rendimientos reales. La premisa básica de nuestro análisis es que las opiniones de los participantes en los mercados financieros sobre el estado estacionario de cada economía, incluido su tasa de interés natural, se reflejan en las expectativas a más largo plazo codificadas en los precios de los bonos.

Los datos sobre bonos también ofrecen ventajas adicionales. En primer lugar, los tres países tienen mercados bastante líquidos de deuda pública indexada a la inflación. En segundo lugar, con vencimientos de hasta 40 años en el caso de Brasil, estos mercados de bonos indexados a la inflación contienen una importante información prospectiva y, por lo tanto, es probable que proporcionen pruebas claras sobre el tema que nos ocupa.

En tercer lugar, al basarnos en bonos indexados a la inflación, evitamos cualquier problema relacionado con el límite inferior cero que pueda aplicarse a las tasas a un día y a otras tasas de interés nominales. Además, dado que los factores subyacentes que afectan a las tasas de interés a largo plazo son probablemente de naturaleza global -como los cambios demográficos mundiales, los cambios en las tendencias de productividad o los ajustes persistentes en las cadenas de suministro globales en el mundo postpandémico, estos tres mercados de deuda pública pueden ser tan informativos como cualquier otro mercado emergente de deuda soberana. Así pues, consideramos que nuestra recopilación de datos sobre bonos es representativa de los mercados de bonos emergentes en general.

A pesar de estas ventajas, existen ciertas dificultades empíricas a la hora de utilizar bonos indexados a la inflación para calcular la tasa de interés real a corto plazo en estado estacionario. Uno de los problemas es que el precio de los bonos indexados a la inflación incluye una prima por plazo real. Lo más probable es que la prima por plazo real sea positiva porque las curvas de rendimiento de los bonos indexados a la inflación en nuestros datos tienen una pendiente ascendente. Pero no se sabe con certeza nada sobre su tamaño o variabilidad. Además, Cardozo y Christensen (2023) sostienen que, incluso con la cantidad nomenclativa relativamente alta de bonos indexados a la inflación en circulación en las tres naciones consideradas, estos activos conllevan naturalmente un nivel significativo de riesgo de liquidez debido a cuestiones estructurales. En primer lugar, dado que proporcionan una cobertura frente al riesgo de inflación, es probable que se negocien mucho menos que los bonos nominales. En segundo lugar, como este argumento de cobertura sólo se aplica a los inversores

---

6 El IPC es también el índice de precios al que se dirigen los tres bancos centrales respectivos a efectos de política monetaria.

nacionales cuyos gastos de consumo siguen el IPC local, los extranjeros no se beneficiarán de la tenencia de estos valores. En consecuencia, la negociación de bonos indexados a la inflación acaba concentrándose entre inversores nacionales pacientes que compran y mantienen, como los fondos de pensiones y las compañías de seguros. Es razonable suponer que los inversores quieren una prima a cambio de asumir el riesgo de liquidez que conlleva la tenencia de bonos indicados con la inflación, pero se necesita más investigación para determinar el tamaño y la variabilidad temporal de esta prima. Por último, señalamos que realizamos nuestro análisis bajo el supuesto financiero estándar de que los bonos del Estado están libres de impago. Por lo tanto, no tenemos en cuenta el riesgo de crédito. Aunque esta omisión puede sesgar en cierta medida nuestros resultados, señalamos en apoyo de esta elección de modelo que la ratio deuda pública/PIB nominal en 2022 era del 72,9%, 37,6% y 48,3% para Brasil, Chile y México, respectivamente<sup>7</sup>, que son valores bajos en comparación con la mayoría de las economías avanzadas, incluido Estados Unidos. Utilizamos un modelo dinámico de estructura temporal sin arbitraje de los rendimientos reales mejorado con un factor de riesgo de liquidez para estimar la tasa de interés natural en presencia de primas por plazo reales y de liquidez. El factor de riesgo de liquidez puede identificarse en función de su carga específica para cada valor, según las conclusiones de Andreasen, Christensen y Riddell (2021, en adelante ACR). En lugar de utilizar los rendimientos de curvas sintéticas ajustadas como entrada más común, nuestra técnica emplea los precios de bonos reales.

La idea fundamental es que un porcentaje cada vez mayor de las existencias en circulación acabará bloqueado en carteras de compra y retención. Este efecto de bloqueo sugiere que, dado el comportamiento prospectivo de los inversores, la vulnerabilidad de un bono al factor de liquidez de todo el mercado diferirá en función de su antigüedad y proximidad al vencimiento. Mediante el análisis de una sección transversal de los precios de los bonos a lo largo del tiempo, cada uno con un plazo de vencimiento y un tiempo desde la emisión únicos, podemos determinar el factor de liquidez global, así como el grado en que cada bono se ve afectado por él. En los primeros años de nuestras muestras, cuando sólo se dispone de una pequeña muestra de bonos, esta técnica es especialmente útil para evaluar la deuda indexada a la inflación<sup>8</sup>.

La formulación teórica sin arbitraje del modelo también identifica una prima por plazo real variable en el tiempo en la fijación de precios de los bonos indexados a la inflación. Al determinar la prima de liquidez y la prima a plazo real, podemos estimar la estructura temporal subyacente de tasa reales sin fricciones y la tasa de interés real natural, que caracterizamos como la tasa

---

7 Ver <https://focus-economics.com>.

8 Finlay y Wende (2012) examinan los precios de un número limitado de bonos australianos indexados a la inflación, pero no tienen en cuenta las primas de liquidez.

corto real medio proyectado a lo largo de un período de cinco años que comienza con cinco años de antelación, como en CR.

A continuación, se resumen nuestros resultados. En primer lugar, en línea con el razonamiento presentado en Cardozo y Christensen (2023), existen primas de riesgo de liquidez significativas y variables en el tiempo en los tres mercados. Esto subraya lo crucial que es tener en cuenta estas primas en nuestro análisis. En segundo lugar, existe una variación significativa en las estimaciones de la tasa real natural entre las tres economías consideradas. Esto refleja probablemente lo diferentes que son sus fundamentos económicos entre sí. Dejamos para futuros estudios la comprobación de si esto es cierto para otras economías en desarrollo de América Latina y de otros lugares. Como ejercicio final, utilizamos nuestras estimaciones de la tasa real natural para construir una medida de la orientación de la política monetaria en cada país. Estas medidas sugieren que, aunque acomodaticia durante el periodo pandémico, la política monetaria había alcanzado una orientación muy restrictiva en los tres países al final del periodo de la muestra. Sin embargo, subrayamos que nuestras estimaciones de la tasa real natural están asociadas a una incertidumbre significativa, que merece la pena tener en cuenta si se utilizan para extraer implicaciones para la conducción de la política monetaria.

Así es como se estructura el resto del documento. En la sección 2 se describen los datos sobre bonos indexados a la inflación, y en la sección 3 se presentan los resultados empíricos y los modelos de estructura temporal sin arbitraje que aplicamos. La estimación de las primas de liquidez específicas de los bonos se examina brevemente en la Sección 4, y nuestras estimaciones de la tasa real natural basadas en los bonos se analizan en la Sección 5. La Sección 6 concluye. La Sección 6 concluye. Nuestros datos brasileños se detallan en el apéndice junto con un resumen del proceso de selección de modelos de cada país.

## **2. LOS DATOS DE LOS BONOS INDEXADOS A LA INFLACIÓN**

En esta sección, describimos brevemente los datos de los bonos indexados a la inflación que utilizamos en las estimaciones de nuestro modelo.

Nuestra muestra de bonos brasileños indexados a la inflación se descarga de Bloomberg y contiene los precios de 31 bonos desde noviembre de 2005 hasta septiembre de 2023. El Apéndice A proporciona más detalles sobre nuestra muestra de bonos brasileños<sup>9</sup>.

El gobierno chileno emitió sus primeros bonos indexados a la inflación en la década de 1960. Estos bonos se conocen como bonos tesorería UF (BTU) y

---

<sup>9</sup> De Pooter et al. (2014) utilizan estos precios de bonos reales brasileños, pero no con nuestro nivel de detalle.

bonos central UF (BCU). Nuestra muestra se obtuvo de Riskamerica ([www.riskamerica.com](http://www.riskamerica.com)), abarca el periodo comprendido entre agosto de 2003 y julio de 2023, y contiene los precios de un total de 72 bonos. Fue analizada por primera vez en Ceballos et al. (2024). Por lo tanto, remitimos a los lectores interesados a ese documento para más detalles sobre los datos chilenos<sup>10</sup>.

Los bonos mexicanos indexados a la inflación se conocen como udibonos. Nuestra muestra de precios de udibonos se descarga de Bloomberg y cubre el periodo de mayo de 2009 a septiembre de 2023 con precios para un total de 20 bonos. Fue analizada por primera vez por Beaugregard et al. (2021). Por lo tanto, remitimos a los lectores interesados a ese documento para obtener detalles adicionales sobre nuestros datos mexicanos.

Fundamentalmente, debido al desfase de indexación en sus pagos, los precios de los bonos indexados a la inflación próximos a su vencimiento tienden a ser bastante impredecibles, como mencionan Gürkaynak et al. (2010) y ACR. En consecuencia, excluimos los bonos indexados a la inflación de cada una de las tres muestras en el momento en que les queda menos de un año para su vencimiento, con el fin de facilitar la estimación del modelo.

El gráfico 1 muestra las series de rendimiento al vencimiento de todos los bonos indexados a la inflación de nuestra muestra para cada uno de los tres países. Las tres muestras de rendimientos se caracterizan por una pronunciada variación del ciclo económico. Además, los rendimientos reales en los tres países cayeron bruscamente en el punto álgido de la pandemia de COVID-19. Sin embargo, fuera de ese período, los rendimientos comunes se mantuvieron estables. Sin embargo, fuera de ese periodo, los puntos en común son menos evidentes. Además, en general operan a niveles diferentes, con Brasil ofreciendo las tasas reales más altas, mientras que Chile tiende a tener las tasas reales más bajas seguido de cerca por México<sup>11</sup>.

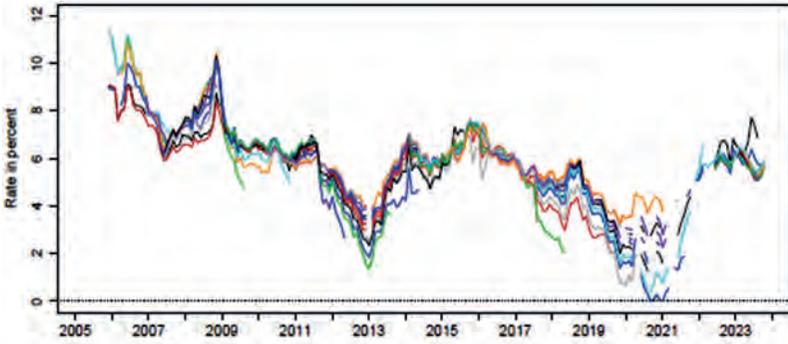
Un aspecto clave a tener en cuenta es que tanto el número de bonos como su distribución de vencimientos varían en las tres muestras. Por lo tanto, estos rendimientos no son directamente comparables. Afortunadamente, nuestros modelos de estructura temporal nos permiten tener en cuenta con precisión estas diferencias en las muestras, además de proporcionar ajustes a las tasas reales observados tanto para las primas de riesgo de liquidez específicas de los bonos como para las primas temporales generales. De este modo, obtenemos información sobre las expectativas de los inversores respecto a las tasas reales a corto subyacentes en cada uno de estos tres importantes mercados de bonos indexados a la inflación. El resto del documento está dedicado a esta tarea.

---

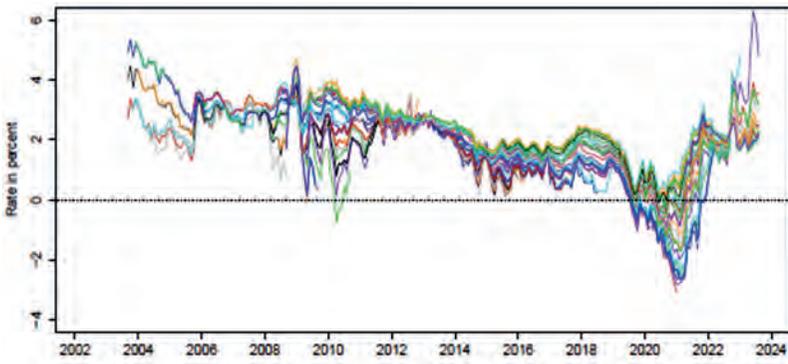
10 Véase en Ceballos et al. (2016) un análisis de los rendimientos nominales chilenos y las primas por plazo.

11 El alto nivel de las tasas de interés en Brasil no ha pasado desapercibido en la literatura académica. Arida et al. (2015), Gonçalves et al. (2007) y Bacha et al. (2009) examinan el papel de la incertidumbre jurisdiccional en los contratos brasileños de préstamo a largo plazo, mientras que Barbosa (2006) destaca el papel del elevado nivel de deuda pública en Brasil. Por último, Segura-Ubiergo (2012) hace hincapié en el bajo nivel de ahorro interno de Brasil.

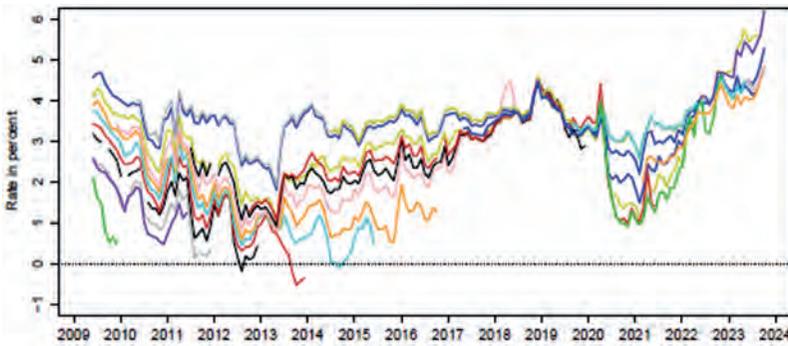
**Figura 1.**  
Rendimiento al vencimiento de los bonos indexados a la inflación



(a) Brazil



(b) Chile



(c) Mexico

### 3. ESTIMACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS

Lo primero que tratamos en esta parte es cómo modelizamos los rendimientos en un escenario en el que no existen barreras comerciales. Nuestro análisis se basa en este modelo de dinámica sin fricciones. A continuación, describimos en detalle el modelo actualizado que explica las primas de liquidez de los rendimientos de los bonos indexados a la inflación. A continuación, se describen las limitaciones establecidas para llevar a cabo la identificación y estimación econométrica de este modelo. Concluimos la sección con una explicación sucinta de nuestro proceso de selección de modelos y de los resultados de las estimaciones correspondientes.

#### 3.1 UN MODELO DE RENDIMIENTOS REALES SIN ARBITRAJE Y SIN FRICCIONES

Decidimos concentrarnos en el modelo de estructura temporal dinámica afín y manejable presentado en Christensen et al. (2011) para representar las variables básicas o sin fricción que impulsan cada curva de rendimiento real<sup>12</sup>.

En este modelo Nelson-Siegel libre de arbitraje (AFNS) el vector de estado se denota por  $X_t = (L_t, S_t, C_t)$ , donde  $L_t$  es un factor de nivel,  $S_t$  es un factor de pendiente y  $C_t$  es un factor de curvatura. La tasa real instantáneo sin riesgo se define como:

$$r_t = L_t + S_t. \quad (1)$$

Las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas proporcionan la dinámica neutral al riesgo (or  $\mathbb{Q}$ -) de las variables de estado<sup>13</sup>

$$\begin{pmatrix} dL_t \\ dS_t \\ dC_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix} dt + \Sigma \begin{pmatrix} dW_t^{L,\mathbb{Q}} \\ dW_t^{S,\mathbb{Q}} \\ dW_t^{C,\mathbb{Q}} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde  $\Sigma$  es la matriz de covarianza constante, a menudo conocida como volatilidad. La estructura de carga factorial de Nelson-Siegel es preservada por los rendimientos de bonos reales de cupón cero basados en esta formulación de la  $\mathbb{Q}$ -dinámica como:

- 12 Aunque el modelo no se formula utilizando la forma canónica de los modelos de estructura temporal afín introducidos por Dai y Singleton (2000), puede considerarse como una versión restringida del modelo gaussiano canónico; véase Christensen et al. (2011) para más detalles.
- 13 Como se discute en Christensen et al. (2011), con una raíz unitaria en el factor de nivel, el modelo no está libre de arbitraje con un horizonte no limitado-libre de arbitraje con un horizonte ilimitado; por lo tanto, como se hace a menudo en las discusiones teóricas, imponemos un horizonte máximo arbitrario.

$$y_t(\tau) = L_t + \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) S_t + \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) C_t - \frac{A(\tau)}{\tau}, \quad (3)$$

donde  $\frac{A(\tau)}{\tau}$  es un término de convexidad que garantiza que no haya arbitraje ajustando la forma funcional de Nelson y Siegel (1987) (véase Christensen et al., 2011).

Tendremos que definir las primas de riesgo que vinculan la dinámica de estos factores bajo la  $\mathbb{Q}$ -medida con la dinámica bajo la  $\mathbb{P}$ -medida del mundo real (o física) para terminar la descripción del modelo y llevarlo a la práctica empírica. Cabe destacar que, aparte del requisito de volatilidad constante, los componentes dinámicos de la deriva no están restringidos bajo la  $\mathbb{P}$ -medida empírica. Empleamos la definición de prima de riesgo esencialmente afín presentada por primera vez por Duffee (2002) para permitir la aplicación empírica. Esta especificación sugiere que las primas de riesgo  $\Gamma_t$  en el marco gaussiano dependen de las variables de estado; es decir, cuando  $y^0 \in \mathbb{R}^3$  and  $y^1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  contienen parámetros no restringidos,  $\Gamma_t$  adopta la forma

$$\Gamma_t = \gamma^0 + \gamma^1 X_t,$$

En consecuencia, la  $\mathbb{P}$ -dinámica para el modelo AFNS de tres factores sin restricciones resultante viene dada por

$$\begin{pmatrix} dL_t \\ dS_t \\ dC_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}^{\mathbb{P}} & k_{12}^{\mathbb{P}} & k_{13}^{\mathbb{P}} \\ k_{21}^{\mathbb{P}} & k_{22}^{\mathbb{P}} & k_{23}^{\mathbb{P}} \\ k_{31}^{\mathbb{P}} & k_{32}^{\mathbb{P}} & k_{33}^{\mathbb{P}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^{\mathbb{P}} \\ \theta_2^{\mathbb{P}} \\ \theta_3^{\mathbb{P}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix} dt + \Sigma \begin{pmatrix} W_t^{L,\mathbb{P}} \\ W_t^{S,\mathbb{P}} \\ W_t^{C,\mathbb{P}} \end{pmatrix}$$

En la estimación del filtro de Kalman, ésta es la ecuación de transición.

### 3.2 UN MODELO DE RENDIMIENTOS REALES SIN ARBITRAJE CON RIESGO DE LIQUIDEZ

Para tener en cuenta la prima de liquidez de los precios de los bonos indexados a la inflación que utilizamos en la investigación empírica, modificamos el modelo sin fricciones que se introdujo anteriormente. Para ello, utilizaremos el modelo AFNS-L para denotar el modelo de cuatro factores con ajuste de la prima de riesgo de liquidez y dejaremos que  $X_t = (L_t, S_t, C_t, X_t^{\text{liq}})$  represente su vector de estado. La tasa real instantáneo sin fricción

libre de riesgo se define mediante la ecuación (1), que es la misma que en el modelo no aumentado, y la dinámica neutral al riesgo de las variables de estado necesarias para la fijación de precios viene dada por

$$\begin{pmatrix} dL_t \\ dS_t \\ dC_t \\ dX_t^{liq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{liq}^Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_{liq}^Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \\ X_t^{liq} \end{pmatrix} dt + \Sigma \begin{pmatrix} dW_t^{L,Q} \\ dW_t^{S,Q} \\ dW_t^{C,Q} \\ dW_t^{liq,Q} \end{pmatrix},$$

donde la matriz de volatilidad  $\Sigma$  sigue siendo diagonal.

En el modelo AFNS-L aumentado, los rendimientos de los bonos indexados a la inflación son sensibles al riesgo de liquidez específico de los bonos porque su fijación de precios se realiza utilizando una función de descuento que tiene en cuenta el riesgo de liquidez propio de cada bono en lugar de la función de descuento real sin fricción:

$$\bar{r}_t^i = r_t + \beta^i \left( 1 - e^{-\lambda R_i(t-t_0^i)} \right) X_t^{liq} = L_t + S_t + \beta^i \left( 1 - e^{-\lambda R_i(t-t_0^i)} \right) X_t^{liq}. \quad (4)$$

La siguiente forma exponencial-afín representa entonces el valor actual neto de una sola unidad de consumo pagada por el bono  $i$  en el momento  $t + \tau$ , según CR:

$$P_t(t_0^i, \tau) = E^Q \left[ e^{-\int_t^{t+\tau} \bar{r}^i(s, t_0^i) ds} \right]$$

$$P_t(t_0^i, \tau) = \exp \left( B_1(\tau)L_t + B_2(\tau)S_t + B_3(\tau)C_t + B_4(t, t_0^i, \tau)X_t^{liq} + A(t, t_0^i, \tau) \right).$$

Esta conclusión demuestra que el modelo pertenece a la clase de modelos de estructura temporal afín gaussiana. Obsérvese que el modelo AFNS puede restablecerse garantizando que  $\beta^i=0$  para cada  $i$ .

Consideremos un bono etiquetado como  $i$ , que se emitió en el momento  $t_0^i$  tiene una fecha de vencimiento de  $t + \tau^i$  y paga un cupón anual  $C^i$  semestralmente. Su coste, que es igual a su valor actual neto, viene determinado por<sup>14</sup>

$$P_t(t_0^i, \tau^i, C^i) = C^i(t_1 - t)E^Q \left[ e^{-\int_t^{t_1} \bar{r}^{R,i}(s, t_0^i) ds} \right] + \sum_{j=2}^N \frac{C^i}{2} E^Q \left[ e^{-\int_t^{t_j} \bar{r}^{R,i}(s, t_0^i) ds} \right]$$

$$+ E^Q \left[ e^{-\int_t^{t+\tau^i} \bar{r}^{R,i}(s, t_0^i) ds} \right]$$

14 Este es el precio limpio que no tiene en cuenta ningún interés devengado y se corresponde con nuestros precios de bonos observados.

Los bonos indexados a la inflación de los tres mercados tienen un precio tan simple como el indicado anteriormente porque carecen de una opción de protección contra la deflación incorporada, a diferencia de los valores del Tesoro estadounidense protegidos contra la inflación (TIPS). La fórmula de fijación de precios de los bonos que utilizamos sólo tiene una pequeña omisión. No se tiene en cuenta el desfase en la indexación a la inflación del bono. Dado que eliminamos los bonos de nuestra muestra cuando les queda menos de un año para su vencimiento, el posible error derivado de esta omisión debería ser mínimo (véase Grishchenko y Huang, 2013).

Por último, definimos una estructura de primas de riesgo esencialmente afín una vez más para terminar la descripción del modelo AFNS-L. Esto permite que las primas de riesgo  $\Gamma_t$  tengan la siguiente forma afín general

$$\Gamma_t = \gamma^0 + \gamma^1 X_t,$$

donde los parámetros no restringidos están contenidos en  $\gamma^0 \in \mathbb{R}^4$  and  $\gamma^1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . En consecuencia, la  $\mathbb{P}$ -dinámica para el modelo AFNS-L de cuatro factores sin restricciones resultante viene dada por

$$\begin{pmatrix} dL_t \\ dS_t \\ dC_t \\ dX_t^{iiq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}^{\mathbb{P}} & k_{12}^{\mathbb{P}} & k_{13}^{\mathbb{P}} & k_{14}^{\mathbb{P}} \\ k_{12}^{\mathbb{P}} & k_{22}^{\mathbb{P}} & k_{23}^{\mathbb{P}} & k_{24}^{\mathbb{P}} \\ k_{13}^{\mathbb{P}} & k_{23}^{\mathbb{P}} & k_{33}^{\mathbb{P}} & k_{34}^{\mathbb{P}} \\ k_{14}^{\mathbb{P}} & k_{24}^{\mathbb{P}} & k_{34}^{\mathbb{P}} & k_{44}^{\mathbb{P}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^{\mathbb{P}} \\ \theta_2^{\mathbb{P}} \\ \theta_3^{\mathbb{P}} \\ \theta_4^{\mathbb{P}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \\ X_t^{iiq} \end{pmatrix} dt + \Sigma \begin{pmatrix} dW_t^{L,\mathbb{P}} \\ dW_t^{S,\mathbb{P}} \\ dW_t^{C,\mathbb{P}} \\ dW_t^{iiq,\mathbb{P}} \end{pmatrix}.$$

En la estimación del filtro de Kalman, ésta es la ecuación de transición.

### 3.3 ESTIMACIÓN DEL MODELO E IDENTIFICACIÓN ECONÓMÉTRICA

El modelo no puede estimarse utilizando el filtro de Kalman estándar debido a la relación no lineal entre las variables de estado y los precios de los bonos. En su lugar, empleamos el filtro de Kalman ampliado, tal y como se describe en Kim y Singleton (2012); los detalles se recogen en CR. Además, escalamos los precios de los bonos en función de su duración para que los errores ajustados sean comparables entre bonos con diferentes vencimientos.

Como resultado, la ecuación de medida de los precios de los bonos tiene la siguiente forma

$$\frac{P_t^i(t_0^i, \tau^i)}{D_t^i(t_0^i, \tau^i)} = \bar{P}_t^i(t_0^i, \tau^i) + \varepsilon_t^i,$$

donde  $\bar{P}_t^L(t_0^L, \tau)$  es el precio implícito en el modelo del bono, y  $D_t^L(t_0^L, \tau^L)$  que se determina antes de la estimación, es su duración. Para evidencia a favor de esta formulación de la ecuación de medida, véase Andreasen et al. (2019).

Además, sin más limitaciones, no se puede determinar el grado del componente de riesgo de liquidez porque es una característica latente que no presenciamos. Permitimos una carga unitaria en este componente (es decir,  $\beta^1 = 1$ ) para el primer bono a 40 años emitido el 15 de septiembre de 2004, con vencimiento el 15 de mayo de 2045, con un cupón del 6 por ciento, para el mercado brasileño. Utilizamos la estrategia empleada por Ceballos et al. (2024) para el mercado chileno, utilizando el primer bono a 20 años, que se emitió el 11 de septiembre de 2002 y vencerá el 1 de septiembre de 2022. Tiene un cupón del 5 por ciento y tendrá una carga unitaria en el factor de riesgo específico del bono. Para el mercado mexicano, el primer bono mexicano de udibonos a 30 años, que se emitió el 5 de enero de 2006 y vence el 22 de noviembre de 2035, tendrá una carga unitaria en este factor, tal y como utilizan Beauregard et al. (2021).

Por último, observamos que puede resultar difícil determinar si los parámetros  $\lambda^{L,i}$  son demasiado grandes o demasiado pequeños. Por lo tanto, sin ramificaciones prácticas, nos adherimos al ACR e imponemos la restricción de que se encuentren dentro del intervalo de 0,01 a 10. Además, añadimos la restricción de que los parámetros  $\beta^1$  deben encontrarse entre 0 y 10. Además, añadimos la restricción de que los parámetros  $\beta^1$  deben estar comprendidos entre 0 y 100 para garantizar la estabilidad numérica durante la optimización del modelo. Esta restricción resulta no ser vinculante en la solución óptima.

**Tabla 1.**

*Parámetros Dinámicos Estimados del Modelo AFNS-L Brasileño Preferido*

$K^{\mathbb{P}}$	$K_{.,1}^{\mathbb{P}}$	$K_{.,2}^{\mathbb{P}}$	$K_{.,3}^{\mathbb{P}}$	$K_{.,4}^{\mathbb{P}}$	$\theta^{\mathbb{P}}$		$\Sigma$
$K_{1.}^{\mathbb{P}}$	0.0302 (0.0526)	0	0	0	0.1034 (0.0112)	$\sigma_{11}$	0.0088 (0.0003)
$K_{2.}^{\mathbb{P}}$	0	1.2967 (0.1523)	0.7965 (0.1370)	0	0.0255 (0.0175)	$\sigma_{22}$	0.0261 (0.0019)
$K_{3.}^{\mathbb{P}}$	4.2294 (0.1749)	-2.0124 (0.1626)	0.5960 (0.1311)	0	-0.0986 (0.0328)	$\sigma_{33}$	0.0373 (0.0027)
$K_{4.}^{\mathbb{P}}$	3.1276 (0.1685)	-2.1401 (0.1699)	0	0.0071 (0.2435)	0.3999 (0.1467)	$\sigma_{44}$	0.0478 (0.0043)

*Nota.* La tabla presenta los parámetros estimados para la matriz diagonal  $\Sigma$  el vector  $\theta^{\mathbb{P}}$  y la matriz  $K^{\mathbb{P}}$  para el modelo brasileño AFNS-L que se prefiere en función del BIC.  $\lambda$  se proyecta en 0,3042 (0,0093),  $k^{\mathbb{Q}}_{liq}$  en 2,7175 (0,0950) y  $\theta^{\mathbb{Q}}_{liq}$  en 0,0167 (0,0010). 11.408,63 es el mayor valor de la probabilidad logarítmica. Las desviaciones estándar de los parámetros calculados se indican con los valores entre paréntesis.

### 3.4 SELECCIÓN DEL MODELO

La definición de la matriz de reversión a la media  $K^{\mathbb{P}}$  es crucial para el cálculo de la tasa real natural y las primas por plazo real relacionadas, como se indica en Ceballos et al. (2024). Restringiendo a cero el parámetro no diagonal menos importante de  $K^{\mathbb{P}}$  y reestimando el modelo, utilizamos un enfoque de modelización de general a específico para obtener la caracterización adecuada de la dinámica del mundo real para cada modelo. Este proceso continúa hasta que se alcanza la especificación más parsimoniosa, que tiene una matriz  $K^{\mathbb{P}}$  diagonal. Según Christensen et al. (2014)<sup>15</sup>, la selección de la especificación definitiva viene determinada por el valor del criterio de información bayesiano (BIC). El apéndice B contiene los datos resumidos del procedimiento de selección de modelos para cada nación.

La especificación (10) minimiza el BIC para los datos de bonos brasileños, con una matriz  $K^{\mathbb{P}}$  proporcionada por

$$K^{\mathbb{P}}_{BRA} = \begin{pmatrix} K^{\mathbb{P}}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^{\mathbb{P}}_{22} & K^{\mathbb{P}}_{23} & 0 \\ K^{\mathbb{P}}_{31} & K^{\mathbb{P}}_{32} & K^{\mathbb{P}}_{33} & 0 \\ K^{\mathbb{P}}_{41} & K^{\mathbb{P}}_{44} & 0 & K^{\mathbb{P}}_{44} \end{pmatrix}$$

Los parámetros calculados del modelo brasileño recomendado figuran en el cuadro 1.

15 El criterio de información bayesiano se define como  $BIC = -2\log L + k\log T$ , donde  $k$  es el número de parámetros del modelo y  $T$  es el número de observaciones mensuales de los datos. Las muestras de Brasil, Chile y México tienen 215, 240 y 173 observaciones mensuales, respectivamente.

**Tabla 2.**  
Parámetros dinámicos estimados del modelo AFNS-L chileno preferido

$K^{\mathbb{P}}$	$K_{\cdot,1}^{\mathbb{P}}$	$K_{\cdot,2}^{\mathbb{P}}$	$K_{\cdot,3}^{\mathbb{P}}$	$K_{\cdot,4}^{\mathbb{P}}$	$\theta^{\mathbb{P}}$		$\Sigma$
$K_{1\cdot}^{\mathbb{P}}$	0.2658 (0.0537)	0.4050 (0.0517)	0	0	0.0606 (0.0138)	$\sigma_{11}$	0.0064 (0.0003)
$K_{2\cdot}^{\mathbb{P}}$	0	0.4755 (0.0697)	0	0	-0.0584 (0.0119)	$\sigma_{22}$	0.0315 (0.0022)
$K_{3\cdot}^{\mathbb{P}}$	4.1720 (0.0692)	2.1768 (0.0711)	2.7117 (0.0694)	0	-0.0463 (0.0153)	$\sigma_{33}$	0.0322 (0.0024)
$K_{4\cdot}^{\mathbb{P}}$	0	0	0	1.6227 (0.0700)	0.0163 (0.0149)	$\sigma_{44}$	0.0725 (0.0046)

*Nota.* La matriz diagonal  $\Sigma$ , el vector  $\theta^{\mathbb{P}}$  y los parámetros de estimación de la matriz  $K^{\mathbb{P}}$  para el modelo AFNS-L chileno seleccionado basado en el BIC se muestran en la tabla.  $\lambda$  se proyecta en 0,3954 (0,0096),  $k_{liq}^{\mathbb{Q}}$  en 0,0096 (0,0004). El valor máximo es una probabilidad logarítmica de 36.579,89. Las desviaciones típicas de los parámetros se estiman y se representan con los números entre paréntesis.

**Tabla 3.**  
Parámetros dinámicos estimados del modelo AFNS-L mexicano preferido

$K^{\mathbb{P}}$	$K_{\cdot,1}^{\mathbb{P}}$	$K_{\cdot,2}^{\mathbb{P}}$	$K_{\cdot,3}^{\mathbb{P}}$	$K_{\cdot,4}^{\mathbb{P}}$	$\theta^{\mathbb{P}}$		$\Sigma$
$K_{1\cdot}^{\mathbb{P}}$	1.5608 (0.6121)	0	0	1.3082 (0.9169)	0.0382 (0.0129)	$\sigma_{11}$	0.0087 (0.0004)
$K_{2\cdot}^{\mathbb{P}}$	0	0.3866 (0.2865)	0	0	-0.0097 (0.0244)	$\sigma_{22}$	0.0286 (0.0027)
$K_{3\cdot}^{\mathbb{P}}$	0	0	0.8490 (0.5103)	0	-0.0058 (0.0173)	$\sigma_{33}$	0.0401 (0.0056)
$K_{4\cdot}^{\mathbb{P}}$	0	0	0	0.1803 (0.2435)	-0.0084 (0.0166)	$\sigma_{44}$	0.0063 (0.0021)

*Note.* Para el modelo AFNS-L mexicano favorecido, los parámetros estimados BIC de la matriz  $K^{\mathbb{P}}$ , el vector  $\theta^{\mathbb{P}}$  y la matriz diagonal  $\Sigma$  se muestran en la tabla. Una estimación aproximada de  $\lambda$  es 0,8673 (0,0446),  $k_{liq}^{\mathbb{Q}}$  es 0,0493 (0,0558) y  $\theta_{liq}^{\mathbb{Q}}$  es 0,0400 (0,0362). El valor máximo de verosimilitud logarítmica alcanzado es 7.625,03. Las desviaciones típicas de los parámetros se estiman y se representan con los números entre paréntesis. Para los datos chilenos, el BIC se minimiza mediante la especificación (10), que tiene una matriz de reversión de medias dada por

$$K_{CHL}^{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} K_{11}^{\mathbb{P}} & K_{12}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 \\ K_{31}^{\mathbb{P}} & K_{32}^{\mathbb{P}} & K_{33}^{\mathbb{P}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}^{\mathbb{P}} \end{pmatrix}$$

La Tabla 2 reporta los parámetros estimados de la especificación chilena recomendada, que son similares a los encontrados en Ceballos et al. (2024). La especificación (12) minimiza el BIC para los datos de bonos mexicanos, con una matriz  $K^{\mathbb{P}}$  proporcionada por

$$K_{\text{MEX}}^{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} K_{11}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 & K_{14}^{\mathbb{P}} \\ 0 & K_{22}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^{\mathbb{P}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}^{\mathbb{P}} \end{pmatrix}$$

El Cuadro 3 presenta los parámetros estimados de la especificación mexicana seleccionada.

Estos resultados proporcionan un par de conclusiones notables. En primer lugar, los resultados de los procedimientos de selección de modelos muestran que las curvas de rendimiento real en los tres países considerados operan cada una de maneras únicas, como se refleja en las diferentes matrices  $K^{\mathbb{P}}$  de reversión media preferidas. En segundo lugar, debido a la naturaleza latente de nuestros modelos, en general es difícil comparar los parámetros estimados. Sin embargo, el parámetro  $\lambda$  puede interpretarse de forma significativa en todos los modelos, ya que determina el ritmo de decaimiento de la carga del factor de pendiente y la madurez en la que la carga del factor de curvatura alcanza su punto máximo. Por lo tanto, su valor relativamente bajo para los datos brasileños y chilenos implica que los modelos para estos dos países ponen más énfasis en ajustar los precios de los bonos a largo plazo, mientras que el modelo mexicano con un valor para  $\lambda$  que es más del doble del tamaño de los de los otros dos modelos pone relativamente más énfasis en ajustar los precios de los bonos a corto plazo.

### 3.5 AJUSTE DEL MODELO

Por último, echamos un vistazo rápido al ajuste del modelo. A la luz de esto, la Tabla 4 evalúa hasta qué punto cada uno de nuestros tres modelos favoritos se ajusta a los valores de mercado de los bonos con cupón de cada muestra. Para garantizar que los errores de fijación de precios son iguales en todos los valores, cabe señalar que se calculan utilizando el ren-

dimiento implícito de cada bono con cupón<sup>16</sup>. En el cuadro 4 se presentan los estadísticos resumidos del ajuste a todos los bonos de cada muestra, divididos en tramos de vencimiento. También se indica cuántas observaciones hay en cada grupo de vencimientos del mercado.

En general, el ajuste es muy ajustado, con errores medios cuadrados muy bajos para todos los bonos combinados en los tres modelos. Esto es reconfortante, ya que sugiere que no hay ningún componente de riesgo oculto en los residuos no explicados. Además, el ajuste está muy equilibrado entre los vencimientos en los tres modelos. Por lo tanto, no hay ninguna parte de la curva de rendimiento que los modelos no sean capaces de ajustar, lo que también es muy reconfortante.

En cuanto a las muestras individuales, observamos que los datos brasileños son relativamente escasos entre los plazos de 10 y 30 años. Como ya se ha mencionado al hablar de los valores  $\lambda$ , esto no impide que el modelo dé mucha importancia al ajuste de los precios de los bonos en ese segmento de la curva de rendimientos a través de su bajo valor para  $\lambda$ , como también indican los errores de ajuste relativamente modestos para los tramos de vencimiento asociados.

Los datos chilenos cubren bien toda la gama de vencimientos hasta 30 años. Además, como sugiere el bajo valor de  $\lambda$  en nuestro modelo chileno, éste pone más peso en el ajuste de los precios de los bonos a largo plazo. Esto explica sus pequeños errores de ajuste para los vencimientos a partir de 10 años.

#### 4. PREMIO POR LIQUIDEZ DE LOS BONOS INDEXADOS A LA INFLACIÓN

En esta parte se examinan las primas de liquidez indexadas a la inflación que son específicas de cada bono y que se estiman mediante los modelos AFNS-L preferidos analizados en la sección anterior. Antes de estudiar la evolución histórica de las primas de riesgo de liquidez específicas de los bonos, primero las definimos explícitamente.

---

16 Los rendimientos implícitos calculados a partir de los precios observados de los bonos son idénticos a los mostrados en la Figura 1.

**Tabla 4.**

Resumen estadístico de los errores de ajuste de los rendimientos indexados de la deuda pública

Maturity bucket	Brazil			Chile			Mexico		
	Obs.	Mean	RMSE	Obs.	Mean	RMSE	Obs.	Mean	RMSE
0-2	618	-0.71	6.87	604	0.22	7.28	3.24	-0.08	2.78
2-4	583	0.78	5.41	1,149	0.85	7.32	2.50	0.15	2.81
4-6	410	1.03	3.39	906	-1.09	6.09	2.53	0.13	2.38
6-8	325	-0.26	4.00	677	0.93	5.69	2.62	0.18	2.20
8-10	300	-0.92	5.26	674	0.04	5.35	3.52	0.32	2.71
10-12	198	-1.71	5.32	339	-0.67	5.59	4.02	-1.02	3.45
12-14	24	8.63	9.98	309	0.75	4.95	3.96	3.40	5.35
14-16	24	5.99	8.55	334	1.13	4.24	5.36	0.63	5.62
16-18	26	2.72	4.98	385	0.14	3.46	2.35	0.74	1.86
18-20	48	-1.73	4.25	405	0.30	4.32	1.41	0.11	1.09
20-22	48	-0.72	2.16	139	-0.45	6.03	1.18	0.02	0.65
22-24	47	2.54	3.85	144	-0.02	4.15	1.36	0.13	0.84
24-26	46	4.69	7.25	144	-0.03	2.50	2.33	0.68	1.66
26-28	24	-4.33	7.36	157	0.04	3.48	2.70	0.55	2.60
28<	57	-1.81	13.56	180	1.04	4.69	2.76	0.57	3.32
All bonds	2,778	0.06	5.72	6,546	0.23	5.79	2.95	0.09	2.71

*Nota.* Esta tabla muestra el número de observaciones, la media de los errores de valoración (Media) y la raíz cuadrática media de los errores de valoración (RMSE) del modelo AFNS-L preferido para cada país. Los errores de valoración se expresan en puntos básicos y se calculan como la diferencia entre el rendimiento implícito observado de cada bono con cupón y su rendimiento implícito según el modelo.

#### 4.1 PREMIO POR LIQUIDEZ ESTIMADA DE LOS BONOS INDEXADOS A LA INFLACIÓN

A continuación, extraemos la prima de liquidez en cada mercado de bonos indexados a la inflación utilizando los modelos AFNS-L estimados. Para determinar la prima, primero calculamos los precios ajustados de los bonos indexados a la inflación  $\{\hat{p}_t^i\}_{t=1}^T$  para todos los valores existentes en nuestra muestra para el mercado dado utilizando los parámetros estimados y los estados filtrados  $\{\hat{X}_{t|i}\}_{t=1}^T$ . A continuación, se resuelve un problema de punto fijo para convertir estos precios de los bonos en rendimientos al vencimiento, o  $\{\hat{y}_t^i\}_{t=1}^T$  mediante la ecuación

$$\begin{aligned} \hat{P}_t^i = & C(t_1 - t) \exp\{-(t_1 - t) \hat{y}_t^{c,i}\} + \sum_{k=2}^n \frac{C}{2} \exp\{-(t_k - t) \hat{y}_t^{c,i}\} \\ & + \exp\{-(T - t) \hat{y}_t^{c,i}\}, \end{aligned} \quad (5)$$

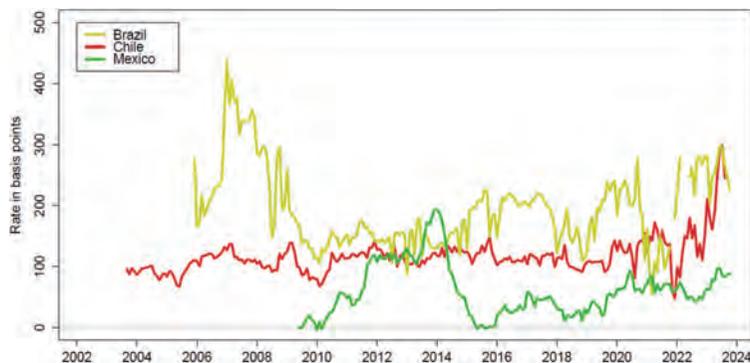
donde  $i=1, 2, \dots, n_t$  lo que indica que, si se mantiene hasta el vencimiento  $\{\hat{y}_t^{c,i}\}_{i=1}^T$  es la tasa de rendimiento real del  $i$ -ésimo bono (véase Sack & Elsas-ser 2004). Se genera un nuevo conjunto de precios de bonos implícitos en el modelo a partir del modelo AFNS-L estimado, pero sólo utilizando su componente sin fricciones, es decir, utilizando las restricciones de que  $\chi_{t|t}^{liq} = 0$  para todo  $t$ , así como  $\sigma_{44} = 0$  and  $\theta_{liq}^Q = 0$ , con el fin de obtener los rendimientos asociados sin compensación por el riesgo de liquidez.

La ecuación (5) se utiliza para convertir estos precios, que se representan como  $\{\hat{P}_t^i\}_{t=1}^T$  en rendimientos al vencimiento,  $\hat{y}_t^{c,i}$ . Se trata de aproximaciones a los precios que se cobrarían en ausencia de fricciones financieras. A continuación, definimos la prima de liquidez del  $i$ -ésimo bono como

$$\Psi_t^i = \hat{y}_t^{c,i} - \tilde{y}_t^{c,i}. \quad (6)$$

**Figura 2.**

*Primas de liquidez medias estimadas de los bonos indexados a la inflación*



*Nota.* Gráfico que representa la prima de liquidez media estimada de los bonos indexados a la inflación para cada fecha de observación en Brasil, Chile y México, tal como sugiere el modelo AFNS-L favorecido. Las primas de liquidez de los bonos indexados a la inflación se determinan estimando la diferencia de rendimiento entre el rendimiento al vencimiento ajustado de cada bono indexado a la inflación y el correspondiente rendimiento al vencimiento sin fricción con la característica de riesgo de liquidez desactivada.

La prima media de liquidez de los bonos indexados a la inflación,  $\Psi_t$  para cada una de las tres naciones de nuestra muestra se muestra en cada punto temporal para los bonos en circulación en la Figura 2. Las tres series son positivas y han mostrado cambios significativos a lo largo del tiempo, como cabría esperar de una prima de riesgo. Las tres series son positivas y han experimentado cambios significativos a lo largo del tiempo, como cabría esperar de una prima de riesgo. Además, observamos que su tamaño no es insignificante, con una media de 144 puntos básicos, 115 puntos básicos y 60 puntos básicos para Brasil, Chile y México, respectivamente. Así pues, las primas de liquidez representan un componente notable en todos estos rendimientos reales, tal como anticipan los argumentos estructurales expuestos en Cardozo y Christensen (2023). A modo de comparación, ese estudio reporta primas de liquidez estimadas para los bonos colombianos indexados a la inflación, llamados bonos UVR, que promedian 225 puntos básicos con una desviación estándar de 32 puntos básicos durante el período 2005-2020. En general, consideramos que estos resultados implican que nuestras primas de liquidez estimadas para los bonos indexados a la inflación son de un tamaño razonable y se sitúan dentro del rango de estimaciones comunicadas para otros mercados comparables de bonos indexados a la inflación.

## 5. ESTIMACIONES DE LA TASA REAL NATURAL BASADAS EN EL MERCADO

En esta sección definimos en primer lugar nuestra medida de la tasa real natural basada en el mercado. A continuación, utilizamos nuestro modelo AFNS-L preferido para cada país con el fin de tener en cuenta la liquidez y las primas por plazo en los precios de los bonos indexados a la inflación. A partir de ahí, obtenemos las tasas cortos reales esperados y la correspondiente medida de la tasa real de equilibrio para cada uno de los tres países de nuestra muestra.

### 5.1 DEFINICIÓN DE LA TASA REAL NATURAL

Nuestra definición de trabajo de la tasa de interés real de equilibrio  $r_t^*$  es

$$r_t^* = \frac{1}{5} \int_{t+5}^{t+10} E_t^{\mathbb{P}} [r_{t+s}^R] ds, \quad (7)$$

es decir, la tasa real a corto medio previsto a cinco años vista, con cinco años de antelación, cuando la previsión se basa en la medida objetiva de probabilidad  $\mathbb{P}$ . Las perturbaciones transitorias a corto plazo deberían tener un impacto mínimo en esta tasa corto real medio previsto a cinco

años vista, como se indica en CR. Una definición alternativa de  $r_t^*$  sería la tasa corto real estimado en un horizonte infinito. Pero el hecho de que la dinámica de los factores muestre o no una raíz unitaria será un factor determinante de esta cifra. Es bien sabido que las duraciones medias de los datos de series temporales disponibles no permiten distinguir de forma significativa entre procesos estacionarios extremadamente persistentes y procesos no estacionarios. Dado que nuestro modelo utiliza la primera estructura, nuestra tasa real predicho en estado estacionario de horizonte infinito es, técnicamente hablando, constante, en línea con la literatura financiera. Sin embargo, creemos que nuestras muestras de datos carecen de información suficiente en el intervalo de horizonte de 10 años a infinito para identificar adecuadamente ese estado estacionario, de ahí que se opte por nuestra definición con un horizonte de medio a largo plazo.

## 5.2 ESTIMACIONES DE LA TASA REAL NATURAL

Utilizamos la tasa real medio a corto plazo previsto para un período de cinco años, comenzando a cinco años vista, como nuestra evaluación de la tasa real natural basada en el mercado. Esta tasa corto real medio previsto a cinco años vista está bien posicionado para representar las tendencias a largo plazo de la tasa real natural y no debería verse afectado por perturbaciones transitorias a corto plazo.

Para ilustrar la descomposición subyacente a nuestra definición de  $r_t^*$ , recordemos que la prima por plazo real se define como

$$TP_t(\tau) = \psi_t(\tau) - \frac{1}{\tau} \int_t^{\tau+t} E_t^{\mathbb{P}}[r_s] ds. \quad (8)$$

Dicho de otro modo, la prima por plazo real es la diferencia en la rentabilidad real esperada entre un plan de refinanciación instantánea de la tasa real sin riesgo  $r_t$ , y una estrategia de comprar y mantener un bono real a  $\tau$  años. Subrayamos que es el rendimiento real sin fricción el que se utiliza para calcular las primas por plazo. En la Figura 3 se muestra el desglose del modelo AFNS-L del rendimiento real a 5 años vista en sus componentes para cada una de las tres naciones. En cada caso, el rendimiento real a 5 años ajustado sin ningún ajuste se muestra con una línea negra continua<sup>17</sup>. El rendimiento real ajustado al modelo AFNS-L, o el rendimiento real sin fricciones a 5 años, se muestra como una línea gris continua. Un indicador de las fricciones de la prima de liquidez en el punto de vencimiento a 5 años

<sup>17</sup> Estos rendimientos reales ajustados se obtienen estimando el modelo AFNS estándar descrito en la sección 3.1 en cada muestra. Son equivalentes a los rendimientos reales observados sin ajustar.

es la diferencia entre el rendimiento real a plazo a 5 años y el rendimiento real sin fricciones a 5 años, que se indica con sombreado amarillo. Obsérvese que esta medida sintética a vencimiento constante de las primas de liquidez es diferente de las medidas específicas de los bonos mostradas en la Figura 2, ya que esta última se ve afectada por la heterogeneidad en los tamaños de los cupones y el tiempo restante hasta el vencimiento entre los bonos de nuestras muestras. Por último, gracias a su coherencia teórica, el modelo AFNS-L proporciona una descomposición del rendimiento real sin fricciones a 5 años en su componente de expectativas de las tasas cortos reales y la prima temporal real residual basada en la ecuación (8). En cada gráfico, la línea verde continua es la prima real a plazo a 5 años, mientras que la línea azul continua es el componente de expectativas, que es idéntico a nuestra definición de  $r_t^*$ .

En primer lugar, y lo que es más importante, observamos las considerables primas de liquidez de los bonos indexados a la inflación que abren una gran brecha entre el rendimiento real observado a 5 años y 5 años mostrado con una línea negra sólida y el rendimiento real inferior sin fricción a 5 años y 5 años mostrado con una línea gris sólida en los tres países. Por lo tanto, sin el ajuste de la prima de liquidez, uno podría creer que los rendimientos reales son mucho más altos de lo que realmente son, un punto también señalado por Andreasen y Christensen (2016) en el contexto de los TIPS estadounidenses.

Para Brasil, la descomposición del modelo produce una estimación de  $r_t^*$  que fluctúa significativamente con el ciclo económico en torno a una tendencia general más baja. Comienza cerca del 7 por ciento a principios de 2006, pero luego cae persistentemente hasta alcanzar un nivel inferior al 4 por ciento en los meses previos a la pandemia de COVID-19 en la primavera de 2020<sup>18</sup>. Tras la reapertura económica después de la pandemia, nuestra estimación de  $r_t^*$  sugiere que la tasa real natural en Brasil ha vuelto a subir hasta alcanzar un nivel cercano al 4% y medio al final de nuestra muestra. Por el contrario, la prima por plazo real brasileña a 5 años se mantiene relativamente estable, salvo algunas oscilaciones bruscas en los primeros años de nuestra muestra. Por último, la tendencia al alza de la prima de liquidez media estimada específica de los bonos en el Gráfico 2 también es evidente en la prima de liquidez real implícita brasileña a 5 años.

18 Perrelli y Roache (2014) presentan estimaciones de la tasa real natural para Brasil basadas en un modelo macroestructural. Aunque inciertos, informan de una estimación media de  $r_t^*$  del 7,2% para el período 2005-2008, mientras que su estimación media para el período 2010-2013 es del 5,7%.

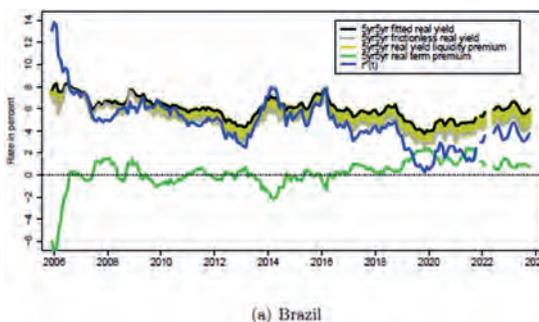
Observamos que, en el caso de Chile, la prima a plazo real a 5 años ha sido bastante constante desde principios de la década de 2000, aunque turbulenta. Nuestra estimación chilena sólo se ajusta parcialmente a las predicciones teóricas de que esta prima es anticíclica y aumenta durante las recesiones económicas. En comparación, la línea azul, que representa la estimación chilena de la tasa natural de interés predicha por el modelo AFNS-L, disminuye gradualmente desde aproximadamente 0,5 por ciento a principios de la década de 2000 hasta menos de -2 por ciento a mediados de 2022. Es importante destacar que se ha mantenido bajo desde entonces a pesar de los grandes aumentos recientes de los rendimientos de los bonos. Al final de nuestra muestra, la estimación chilena de  $r_t^*$  se sitúa en -1,30%.

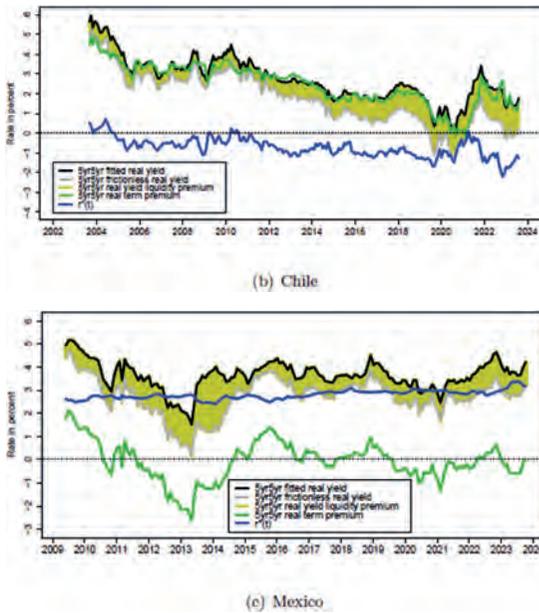
En el caso de México, nuestra estimación de  $r_t^*$  muestra un patrón bastante constante y acíclico para la tasa real natural. En consecuencia, las considerables fluctuaciones en los rendimientos reales sin fricción a 5 años en México, es decir, después de contabilizar los cambios en las primas de liquidez, se deben a cambios en la prima por plazo real a 5 años en México, que con frecuencia cambia de signo a diferencia de su contraparte chilena, que permanece positiva a lo largo de nuestra muestra.

A continuación, ofrecemos una comparación directa de nuestras tres estimaciones de la tasa real natural, que se muestran en la Figura 4. La comparación revela una diferencia marcada y fundamental entre estas tres importantes economías latinoamericanas. La comparación revela una diferencia marcada y fundamental entre estas tres importantes economías latinoamericanas.  
economies.

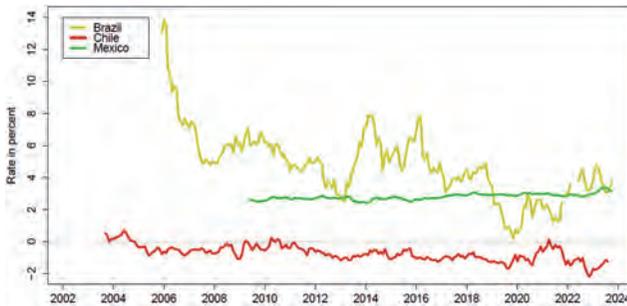
**Figura 3.**

*Descomposición de los rendimientos reales 5yr5yr*





**Figura 4.**  
 Comparación de las estimaciones de  $r_t^*$  basadas en el mercado



La magnitud y la variación de  $r_t^*$  en Brasil apuntan a una cierta inestabilidad de las condiciones económicas fundamentales en ese país. Esto contrasta fuertemente con los resultados para México, que sugieren que las condiciones económicas fundamentales son más estables allí. Sin embargo, el elevado nivel de  $r_t^*$  en México, con un valor cercano al 3%, sigue apuntando a cierta fragilidad económica en relación con las economías avanzadas, donde  $r_t^*$  suele ser más bajo, véase Holston et al. (2017). En este contexto, y dado que Chile es la principal economía más avanzada de América Latina, no es tan sorprendente ver que la tasa real natural chilena es mucho

más baja y, con pocas excepciones, se ha mantenido negativa durante casi 20 años. Además, observamos que Ceballos et al. (2024) encuentran que su estimación chilena de  $r_t^*$  que es similar a la nuestra, sigue tendencias ampliamente similares a una estimación de base macro de  $r_t^*$  para Chile utilizando el enfoque de Holston et al. (2017). También encuentran que su estimación de  $r_t^*$  es similar a una estimación colombiana basada en el mercado calculada a partir de una actualización del análisis de Cardozo y Christensen (2023). Añadimos que la estimación  $r_t^*$  de nuestro modelo AFNS-L preferido para México es muy cercana a la estimación basada en el mercado reportada por Beauregard et al. (2023), aunque ellos utilizan una combinación de precios de bonos nominales mexicanos y precios de bonos mexicanos indexados a la inflación para su análisis. Por lo tanto, consideramos que nuestras estimaciones de  $r_t^*$  tienen un tamaño razonable y son representativas de las estimaciones publicadas en la literatura para nuestra muestra de países.

Por último, es interesante observar que los aumentos de las tasas de interés y el consiguiente endurecimiento de las condiciones financieras en respuesta al período de elevada inflación tras la reapertura económica después de la pandemia de COVID-19 parecen haber dejado sólo huellas relativamente menores en nuestras estimaciones de  $r_t^*$ . Esto sugiere que es probable que las tasas de interés en estos tres grandes países latinoamericanos vuelvan a situarse en niveles más bajos una vez que la inflación haya vuelto al objetivo fijado por sus respectivos bancos centrales. Además, añadimos que la dinámica factorial estimada de nuestros modelos AFNS-L preferidos podría aprovecharse para hacer proyecciones de  $r_t^*$  en el futuro, como se hace en Ceballos et al. (2024). Sin embargo, aunque tales proyecciones podrían ser de enorme importancia tanto para la política fiscal y monetaria como para la gestión de activos a largo plazo, dejamos esa tarea para futuros trabajos con el fin de ahorrar espacio.

Desde un punto de vista práctico, insistimos en que estas estimaciones conllevan una incertidumbre considerable. Por desgracia, no existe un método estándar para calcular sus bandas de confianza. Sin embargo, CR utiliza simulaciones para examinar el papel de la incertidumbre de los parámetros en sus estimaciones de  $r_t^*$  y constata que su impacto es bastante considerable. A esto hay que añadir los efectos no cuantificados de la incertidumbre del modelo y de la medición. Así pues, la recomendación general sería evitar hacer demasiado hincapié en cualquier estimación puntual individual y, en su lugar, centrarse en las tendencias más amplias de las series temporales, de forma similar a nuestra descripción anterior.

### 5.3 ORIENTACIÓN DE LA POLÍTICA MONETARIA

Como ejercicio final, utilizamos nuestras estimaciones de  $r_t^*$  para obtener una medida de la orientación de la política monetaria en las tres economías analizadas. Esto también ofrece una forma alternativa de validar nuestro enfoque para estimar  $r_t^*$ .

Como se señaló en la introducción, las estimaciones de la tasa real natural desempeñan un papel clave en las reglas de política monetaria como indicador por encima del cual la tasa real a corto plazo  $r_t$  se consideraría restrictivo, mientras que las que se sitúan por debajo se asociarían a una orientación acomodaticia de la política monetaria. Así, la orientación de la política monetaria puede medirse como

$$\zeta_t = r_t - r_t^*. \quad (9)$$

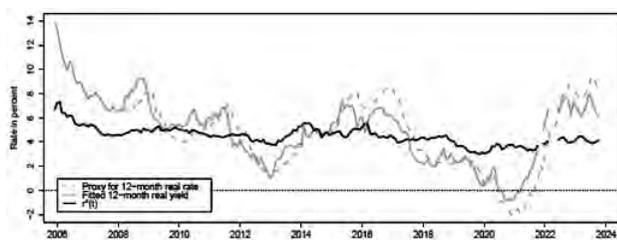
Sin embargo, es importante señalar que, gracias al comportamiento prospectivo de las empresas, sus trabajadores y los inversores en general, no es la tasa de interés real a corto plazo el que importa para una amplia variedad de decisiones económicas, sino el que probablemente prevalezca en los próximos trimestres. Por lo tanto, para cuantificar la orientación de la política monetaria, consideramos dos aproximaciones para  $r_t$ . Una es una medida tomada de Werner (2023) que explota la ecuación de Fischer descontando la tasa de política nominal anualizado con la inflación esperada a 12 meses, mientras que la otra es el rendimiento real a 12 meses ajustado a partir de nuestros datos de bonos sin ningún ajuste, como en Christensen y Mouabbi (2024).<sup>19</sup> Estas medidas de  $r_t$  y la estimación asociada de  $r_t^*$  se muestran en la Figura 5 para cada uno de los tres países de nuestra muestra.

Algunos rasgos comunes son notables. En primer lugar, la política monetaria alcanzó una orientación acomodaticia relativamente pronto durante el periodo pandémico en los tres países. Además, al final de nuestra muestra, la política monetaria parece ser muy restrictiva en términos históricos. Esto subraya el argumento de Werner (2023) de que, a medida que la inflación disminuye gradualmente hacia el objetivo oficial de inflación en las tres economías, las tasas de interés a un día deben reducirse paralelamente para evitar que la política monetaria se vuelva excesivamente restrictiva. Por último, a pesar de las grandes oscilaciones de los rendimientos reales a corto plazo en las tres economías desde 2020, nuestras estimaciones de

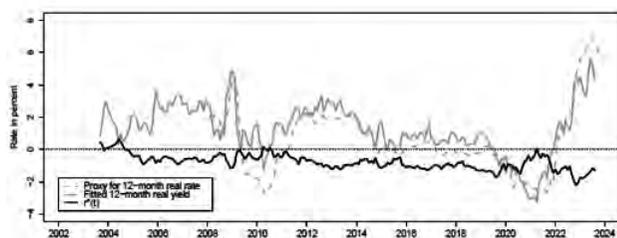
19 Los rendimientos reales ajustados se obtienen estimando el modelo AFNS estándar utilizando la muestra de precios de bonos indexados a la inflación para cada país.

la tasa real natural  $r_t^*$  han variado muy poco, y al final de nuestras muestras están todas cerca de donde estaban a principios de 2020. Esto sugiere que ni el periodo pandémico ni el inesperado repunte de la inflación tras la reapertura económica y el consiguiente endurecimiento de la política monetaria han dejado huellas significativas en la tasa de interés real en estado estacionario de estos tres países. Dado que son representativos tanto de América Latina en concreto como de las economías de mercado emergentes en general, nuestras conclusiones pueden extenderse mucho más allá de la muestra de países aquí examinada. Sin embargo, dejamos para futuras investigaciones la exploración de esta conjetura.

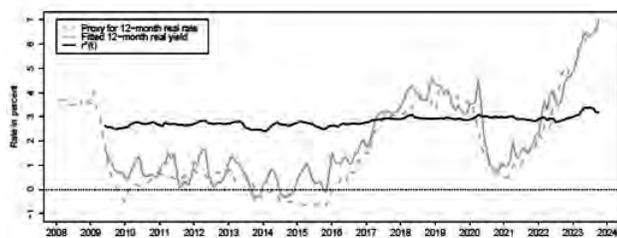
**Figura 5.**  
Medidas de los rendimientos reales a corto plazo y  $r^*$



(a) Brazil



(b) Chile



(c) Mexico

## 6. CONCLUSION

Muchos académicos analizaron la causa de que la tasa de interés real seguro a corto plazo disminuyera con respecto a su nivel estacionario en las décadas anteriores a la epidemia de COVID-19, dado el descenso histórico de los rendimientos de los bonos durante ese periodo. Sin embargo, la mayoría de estas investigaciones empíricas se basaron en modelos y datos macroeconómicos, y algunos han cuestionado las estimaciones macroeconómicas resultantes de la tasa natural debido a la ambigüedad de la especificación macroeconómica apropiada, en particular durante el choque pandémico COVID-19. Al concentrarnos en una medida de la tasa real de equilibrio basada únicamente en los precios de los bonos indexados a la inflación y en modelos empíricos de estructura temporal dinámica, evitamos esta controversia. Revelamos la estimación de los inversores para la tasa corto real subyacente sin fricciones para el periodo de cinco años que comienza cinco años antes, controlando tanto las primas de liquidez de los bonos indexados a la inflación como las primas por plazo reales. Además, nuestro análisis es distinto, ya que utilizamos esta metodología para examinar las tres principales economías emergentes de América Latina: Brasil, Chile y México.

En primer lugar, documentamos primas de riesgo de liquidez amplias y variables en el tiempo en los tres mercados de bonos, con pocos puntos en común. Por lo tanto, nuestro estudio proporciona apoyo empírico a los argumentos expuestos en Cardozo y Christensen (2023), que implican que las tenencias de bonos indexados a la inflación deberían concentrarse entre inversores nacionales pacientes que compran y mantienen, como los fondos de pensiones. Como resultado, los bonos indexados a la inflación deberían negociarse menos que los bonos nominales estándar y enfrentarse a importantes riesgos de liquidez, en consonancia con nuestros resultados. Es importante destacar que esta lógica y nuestros resultados también implican que es probable que los tres mercados de bonos indexados estén realmente dominados por inversores nacionales. En consecuencia, la información sobre el precio de los bonos debería reflejar las expectativas de la tasa reales y el apetito por el riesgo de los inversores nacionales, un supuesto clave que subyace a nuestra elección de analizar cada país por separado.

En un segundo paso, procedemos a ajustar los rendimientos reales sin fricción ajustados a la liquidez para las primas por plazo reales incorporadas, con el fin de obtener nuestras estimaciones de la tasa de interés real natural para cada país. De acuerdo con la intuición anterior, nuestras estimaciones de  $r_t^*$  parecen ser únicas para cada país y bastante dispersas. Nuestra estimación para Brasil es alta en promedio, con grandes fluctuaciones cíclicas. En cambio, nuestra estimación para México es muy estable, aunque elevada en comparación con los

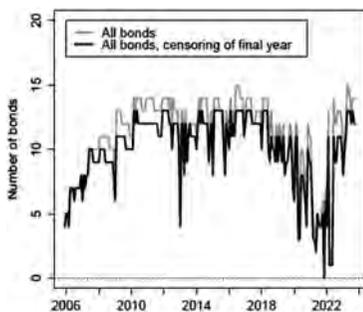
estándares internacionales. Por último, nuestra estimación de  $r_t^*$  para Chile se asemeja a las comunicadas para las economías avanzadas, por ejemplo, como en CR, al ser baja y caracterizarse por un descenso gradual persistente durante los últimos 20 años. La gran dispersión en las estimaciones de la tasa real natural en estas tres economías parece coherente con las notables diferencias en sus fundamentos económicos y su nivel general de desarrollo económico. Sin embargo, dejamos para futuras investigaciones la cuestión de cómo se correlacionan exactamente las diferencias documentadas en las estimaciones de  $r_t^*$  con los fundamentos económicos.

También es probable que la dispersión documentada en  $r_t^*$  tenga implicaciones bastante diferentes para la ejecución de la política monetaria en estos tres países. Sin embargo, a tal fin, debe tenerse presente la notable incertidumbre que rodea a estas estimaciones, como también se subraya en Holston et al. (2017).

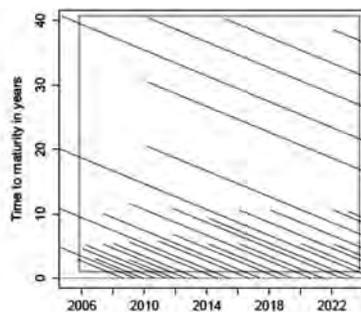
Además, destacamos que nuestro enfoque basado en el mercado para estimar  $r_t^*$  puede aplicarse tanto a las economías avanzadas como a las emergentes. Sin embargo, volvemos a dejar para futuras investigaciones la verificación de si nuestras conclusiones se extienden más allá de las tres principales economías latinoamericanas aquí examinadas.

Por último, nuestras estimaciones de la tasa de interés natural podrían ser una herramienta valiosa para el análisis de la política monetaria en tiempo real, ya que se basan en la información prospectiva que se valora en los mercados activos de bonos indexados a la inflación de estos tres países y que puede actualizarse diariamente. Dejamos la exploración de tales aplicaciones para futuras investigaciones.

## APÉNDICE A: BONOS INDEXADOS A LA INFLACIÓN EN BRASIL



(a) Number of inflation-indexed bonds



(b) Distribution of inflation-indexed bonds

*Nota.* La cantidad de bonos brasileños indexados a la inflación que están en circulación en un momento dado se muestra en el panel (a). El panel (b) muestra la distribución de vencimientos de todos los bonos brasileños indexados a la inflación emitidos desde 2006. La muestra del análisis, que se limita a los precios de los bonos indexados a la inflación con más de un año de vencimiento, está representada por el rectángulo gris sólido. La muestra se inició el 30 de noviembre de 2005 y finaliza el 30 de septiembre de 2023.

Debido a su experiencia con largos periodos de inflación extremadamente elevada, Brasil tiene una larga historia de emisión de bonos indexados a la inflación como instrumento clave para financiar la deuda pública. Estos bonos se conocen como Notas do Tesouro Nacional Serie B, o NTN B, y sus pagos de cupón y principal están indexados al IPCA, que es el principal índice de precios al consumo brasileño y el objetivo del Banco Central de Brasil a la hora de fijar la política monetaria. Como señalan Kubudi y Vicente (2016), el mercado de estos bonos es el quinto mayor mercado de bonos indexados a la inflación del mundo y, por tanto, bastante considerable.

La línea gris continua de la Figura 1(a) representa el número total de bonos brasileños indexados a la inflación en circulación a lo largo del tiempo en nuestra muestra. En septiembre de 2023, cuando finaliza nuestro periodo de estudio, había 14 bonos en circulación. Dicho esto, debido al desfase de indexación en sus pagos, los precios de los bonos indexados a la inflación que se acercan a su vencimiento tienden a ser un poco inestables, como mencionaron Gürkaynak et al. (2010) y ACR. Por lo tanto, eliminamos los bonos indexados a la inflación de nuestra muestra en el momento en que les queda menos de un año para su fecha de vencimiento con el fin de facilitar la estimación del modelo.

La línea negra continua de la Figura 1(a) ilustra cómo el número de bonos de la muestra se reduce algo tras aplicar este umbral. La información contractual de cada uno de los 31 BNA de nuestros datos, junto con la cantidad de observaciones mensuales de cada uno, se incluye finalmente en el Cuadro A1. Un aspecto distintivo de este mercado es que todos los bonos tienen la misma tasa de cupón anual del 6%, que se paga semestralmente.

Normalmente, el gobierno brasileño ha subastado una serie de bonos indexados a la inflación, con vencimientos iniciales que oscilan entre tres y 41 años. La Figura 1(b) muestra la distribución de vencimientos de los 31 bonos de nuestra muestra. Una única línea descendente que muestra los años restantes hasta el vencimiento del bono para cada fecha sirve de representación. El universo de bonos disponible ofrece una buena cobertura de nuestra muestra, en particular para los vencimientos de cinco a diez años de gran interés para nuestra investigación.

**Tabla A1***Muestra de bonos brasileños indexados a la inflación*

Inflation-indexed bond	Issuance Date	No. obs.
(1) 6% 5/15/2009	9/15/2003	29
(2) 6% 8/15/2024	10/15/2003	193
(3) 6% 5/15/2015	10/15/2003	101
(4) 6% 5/15/2045	9/15/2004	171
(5) 6% 8/15/2008	9/15/2005	19
(6) 6% 8/15/2010	1/5/2006	41
(7) 6% 5/15/2011	3/9/2006	50
(8) 6% 11/15/2009	11/9/2006	24
(9) 6% 5/15/2017	5/9/2007	107
(10) 6% 8/15/2012	5/9/2007	51
(11) 6% 5/15/2013	1/9/2008	52
(12) 6% 8/15/2020	1/14/2009	126
(13) 6% 11/15/2011	1/14/2009	22
(14) 6% 8/15/2014	1/14/2009	55
(15) 6% 8/15/2050	2/10/2010	117
(16) 6% 8/15/2030	2/10/2010	129
(17) 6% 8/15/2040	2/10/2010	116
(18) 6% 8/15/2016	11/10/2010	57
(19) 6% 8/15/2022	10/13/2011	114
(20) 6% 8/15/2018	10/13/2011	68
(21) 6% 5/15/2023	1/15/2014	88
(22) 6% 5/15/2019	1/15/2014	52
(23) 6% 5/15/2055	1/14/2015	85
(24) 6% 8/15/2026	1/6/2016	76
(25) 6% 5/15/2021	1/6/2016	52
(26) 6% 8/15/2028	1/10/2018	50
(27) 6% 5/15/2025	1/8/2020	29
(28) 6% 8/15/2032	1/5/2022	17
(29) 6% 8/15/2060	1/12/2022	21
(30) 6% 5/15/2027	1/12/2022	16
(31) 6% 5/15/2033	1/4/2023	6

*Nota.* Para cada bono a lo largo del periodo de muestra, desde el 30 de noviembre de 2005 hasta el 30 de septiembre de 2023, la tabla proporciona información sobre sus atributos, fecha de primera emisión y número de fechas de observación mensual.

## APÉNDICE B: RESULTADOS DE LA SELECCIÓN DE MODELOS

**Tabla B1**

*Evaluación de especificaciones alternativas del modelo brasileño AFNS-L*

Alternative specifications	Goodness of fit statistics			
	log L	k	p-value	BIC
(1) Unrestricted $K^E$	11,419.88	89	n.a.	-22,361.77
(2) $\kappa_{24}^E = 0$	11,419.79	88	0.67	-22,366.96
(3) $\kappa_{24}^E = \kappa_{13}^E = 0$	11,418.77	87	0.15	-22,370.29
(4) $\kappa_{24}^E = \kappa_{13}^E = \kappa_{74}^E = 0$	11,418.76	86	0.89	-22,375.65
(5) $\kappa_{24}^E = \dots = \kappa_{34}^E = 0$	11,418.71	85	0.75	-22,380.92
(6) $\kappa_{24}^E = \dots = \kappa_{74}^E = 0$	11,418.57	84	0.60	-22,386.01
(7) $\kappa_{24}^E = \dots = \kappa_{12}^E = 0$	11,418.27	83	0.44	-22,390.78
(8) $\kappa_{24}^E = \dots = \kappa_{51}^E = 0$	11,417.15	82	0.13	-22,393.91
(9) $\kappa_{24}^E = \dots = \kappa_{41}^E = 0$	11,413.55	81	< 0.01	-22,392.08
(10) $\kappa_{24}^E = \dots = \kappa_{12}^E = 0$	11,411.93	80	0.07	<b>-22,394.21</b>
(11) $\kappa_{24}^E = \dots = \kappa_{31}^E = 0$	11,405.87	79	< 0.01	-22,387.46
(12) $\kappa_{24}^E = \dots = \kappa_{32}^E = 0$	11,403.93	78	0.05	-22,388.95
(13) $\kappa_{24}^E = \dots = \kappa_{23}^E = 0$	11,391.67	77	< 0.01	-22,369.80

*Nota.* En el modelo brasileño AFNS-L hay trece especificaciones estimadas diferentes. En cada especificación se incluye la máxima verosimilitud logarítmica (log L), el número de parámetros (k), el criterio de información bayesiano (BIC) y el valor p de una prueba de razón de verosimilitud de la hipótesis de que difiere de la especificación anterior con un parámetro libre más. El análisis abarca desde el 30 de noviembre de 2005 hasta el 30 de septiembre de 2023, con datos mensuales.

**Tabla B2**

*Evaluación de especificaciones alternativas del modelo AFNS-L chileno*

Alternative specifications	Goodness of fit statistics			
	log L	k	p-value	BIC
(1) Unrestricted $K^E$	36,592.28	171	n.a.	-72,247.37
(2) $\kappa_{23}^E = 0$	36,592.10	170	0.55	-72,252.49
(3) $\kappa_{23}^E = \kappa_{14}^E = 0$	36,592.09	169	0.89	-72,257.95
(4) $\kappa_{23}^E = \kappa_{14}^E = \kappa_{13}^E = 0$	36,590.90	168	0.12	-72,261.05
(5) $\kappa_{23}^E = \dots = \kappa_{34}^E = 0$	36,589.66	167	0.12	-72,264.05
(6) $\kappa_{23}^E = \dots = \kappa_{12}^E = 0$	36,589.54	166	0.62	-72,269.29
(7) $\kappa_{23}^E = \dots = \kappa_{24}^E = 0$	36,584.91	165	< 0.01	-72,265.51
(8) $\kappa_{23}^E = \dots = \kappa_{21}^E = 0$	36,582.49	164	0.03	-72,266.16
(9) $\kappa_{23}^E = \dots = \kappa_{43}^E = 0$	36,581.54	163	0.17	-72,269.74
(10) $\kappa_{23}^E = \dots = \kappa_{31}^E = 0$	36,579.89	162	0.07	<b>-72,271.92</b>
(11) $\kappa_{23}^E = \dots = \kappa_{12}^E = 0$	36,570.83	161	< 0.01	-72,259.28
(12) $\kappa_{23}^E = \dots = \kappa_{32}^E = 0$	36,564.36	160	< 0.01	-72,251.82
(13) $\kappa_{23}^E = \dots = \kappa_{31}^E = 0$	36,559.13	159	< 0.01	-72,246.84

*Nota.* Hay trece especificaciones estimadas diferentes para el modelo chileno AFNS-L. Para cada especificación, se proporciona la siguiente información: la máxima verosimilitud logarítmica (log L), el número de parámetros (k), el valor p de una prueba de razón de verosimilitud sobre la hipótesis de que la especificación varía de la anterior en un parámetro libre, y el criterio de información bayesiano (BIC). En el periodo de análisis se incluyen datos mensuales desde el 31 de agosto de 2003 hasta el 31 de julio de 2023.

**Tabla B3**

Evaluación de especificaciones alternativas del modelo mexicano AFNS-L

Alternative specifications	Goodness of fit statistics			
	log L	k	p-value	BIC
(1) Unrestricted $K^p$	7,633.29	67	n.a.	-14,921.31
(2) $\kappa_{13}^p = 0$	7,633.28	66	0.87	-14,926.43
(3) $\kappa_{13}^p = \kappa_{21}^p = 0$	7,633.24	65	0.79	-14,931.52
(4) $\kappa_{13}^p = \kappa_{21}^p = \kappa_{24}^p = 0$	7,633.22	64	0.84	-14,936.63
(5) $\kappa_{13}^p = \dots = \kappa_{12}^p = 0$	7,633.02	63	0.53	-14,941.39
(6) $\kappa_{13}^p = \dots = \kappa_{43}^p = 0$	7,632.00	62	0.15	-14,944.50
(7) $\kappa_{13}^p = \dots = \kappa_{23}^p = 0$	7,631.36	61	0.26	-14,948.37
(8) $\kappa_{13}^p = \dots = \kappa_{32}^p = 0$	7,629.45	60	0.05	-14,949.71
(9) $\kappa_{13}^p = \dots = \kappa_{32}^p = 0$	7,628.63	59	0.20	-14,953.21
(10) $\kappa_{13}^p = \dots = \kappa_{31}^p = 0$	7,628.01	58	0.27	-14,957.13
(11) $\kappa_{13}^p = \dots = \kappa_{34}^p = 0$	7,627.30	57	0.23	-14,960.86
(12) $\kappa_{13}^p = \dots = \kappa_{41}^p = 0$	7,625.03	56	0.03	<b>-14,961.47</b>
(13) $\kappa_{13}^p = \dots = \kappa_{14}^p = 0$	7,621.58	55	< 0.01	-14,959.73

*Nota.* Hay trece especificaciones estimadas distintas para la variante mexicana AFNS-L. Para cada especificación, se proporciona la siguiente información: la máxima verosimilitud logarítmica (log L), el número de parámetros (k), el valor p de una prueba de razón de verosimilitud sobre la hipótesis de que la especificación varía de la anterior en un parámetro libre, y el criterio de información bayesiano (BIC). En el periodo de análisis se incluyen datos mensuales desde el 31 de mayo de 2009 hasta el 29 de septiembre de 2023.

## 6. REFERENCIAS

- Andreasen, M. M., & Christensen, J. H. (2016). TIPS Liquidity and the Outlook for Inflation. *FRBSF Economic Letter*, 35, 1-5. <https://www.frbsf.org/economic-research/wp-content/uploads/sites/4/el2016-35.pdf>
- Andreasen, M. M., Christensen, J. H., & Riddell, S. (2021). The TIPS liquidity premium. *Review of Finance*, 25(6), 1639-1675. <https://doi.org/10.1093/rof/rfab018>
- Andreasen, M. M., Christensen, J. H., & Rudebusch, G. D. (2019). Term structure analysis with big data: one-step estimation using bond prices. *Journal of Econometrics*, 212(1), 26-46. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2019.04.019>
- Arida, P., Bacha, E. L., & Lara-Resende, A. (2005). Credit, interest, and jurisdictional uncertainty: conjectures on the case of Brazil. in *Inflation Targeting, Debt, and the Brazilian Experience, 1999 to 2003*, edited by F. Giavazzi, I. Goldfajn, and S. Herrera. Cambridge, MA: MIT Press, 265-293 (Chapter 8).
- Bacha, E. L., Holland, M., & Gonçalves, F. M. (2009). A panel-data analysis of interest rates and dollarization in Brazil. *Revista Brasileira de Economia*, Vol. 63, No. 4, 341-360.
- Barbosa, F. de H. (2006). The contagion effect of public debt on monetary policy: the Brazilian experience. *Brazilian Journal of Political Economy*, Vol. 26, No. 2, 231-238.
- Beauregard, R., Christensen, J. H. E., Fischer, E., & Zhu, S. (2021). Inflation Expectations and Risk Premia in Emerging Bond Markets: Evidence from Mexico. *FRB of New York Staff Report*, (961). <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3808273>
- Blake, A. P., Rule, G. R., & Rummel, O. J. (2015). Inflation targeting and term premia estimates for Latin America. *Latin American Economic Review*, 24(1), 1-21. <https://doi.org/10.1007/s40503-015-0017-7>
- Cardozo, C. H. R., & Christensen, J. H. E. (2023). *The Benefit of Inflation-Indexed Debt: Evidence from an Emerging Bond Market*. Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper 2023-04. <https://doi.org/10.24148/wp2023-04>
- Ceballos, L., Christensen, J. H. E. & Romero D. (2024). A post-pandemic new normal for interest rates in emerging bond markets? Evidence from Chile. Mimeo
- Ceballos, L., Naudon, A. & Romero, D. (2016). Nominal term structure and term premia: evidence from Chile. *Applied Economics*, Vol. 48, No. 29, 2721-2735.
- Christensen, J. H., Diebold, F. X., & Rudebusch, G. D. (2011). The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models. *Journal of Econometrics*, 164(1), 4-20. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2011.02.011>
- Christensen, J. H., Lopez, J. A., & Rudebusch, G. D. (2014). Do central bank liquidity facilities affect interbank lending rates?. *Journal of Business & Economic Statistics*, 32(1), 136-151. <https://doi.org/10.1080/07350015.2013.858631>
- Christensen, J. H., & Mouabbi, S. (2024). The natural rate of interest in the euro area: evidence from inflation-indexed bonds. Mimeo.
- Christensen, J. H., & Rudebusch, G. D. (2019). A new normal for interest rates? Evidence from inflation-indexed debt. *Review of Economics and Statistics*, 101(5), 933-949. [https://doi.org/10.1162/rest\\_a\\_00821](https://doi.org/10.1162/rest_a_00821)

- Clarida, R. (2014). Navigating the New Neutral. *Economic Outlook*, PIMCO.
- Dai, Q., & Singleton, K. J. (2000). Specification analysis of affine term structure models. *The Journal of Finance*, 55(5), 1943-1978. <https://doi.org/10.1111/0022-1082.00278>
- De Pooter, M., Robitaille, P. T., Walker, I., & Zdinak, M. (2014). Are long-term inflation expectations well anchored in Brazil, Chile and Mexico?. *International Journal of Central Banking*, 10(2), 337-400. <https://ssrn.com/abstract=2572011>
- Duffee, G. R. (2002). Term premia and interest rate forecasts in affine models. *The Journal of Finance*, 57(1), 405-443. <https://doi.org/10.1111/1540-6261.00426>
- Eggertsson, G. B., Mehrotra, N. R., Singh, S. R., & Summers, L. H. (2016). A contagious malady? Open economy dimensions of secular stagnation. *IMF Economic Review*, 64(4), 581-634. <https://doi.org/10.1057/s41308-016-0019-8>
- Finlay, R., & Wende, S. (2012). Estimating inflation expectations with a limited number of inflation-indexed bonds. *International Journal of Central Banking*, 8(2), 111-142. <https://www.ijcb.org/journal/ijcb12q2a4.htm>
- Grishchenko, O. V., & Huang, J. Z. (2013). Inflation risk premium: Evidence from the TIPS market. *Journal of Fixed Income*, 22(4), 5-30. <http://dx.doi.org/10.3905/jfi.2013.22.4.005>
- Gürkaynak, R. S., Sack, B., & Wright, J. H. (2010). The TIPS yield curve and inflation compensation. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 2(1), 70-92. <http://dx.doi.org/10.1257/mac.2.1.70>
- Hamilton, J. D., Harris, E. S., Hatzius, J., & West, K. D. (2016). The equilibrium real funds rate: Past, present, and future. *IMF Economic Review*, 64, 660-707. <https://doi.org/10.1057/s41308-016-0015-z>
- Holston, K., Laubach, T., & Williams, J. C. (2017). Measuring the natural rate of interest: International trends and determinants. *Journal of International Economics*, 108(1), S59-S75. <https://doi.org/10.1016/j.jinteco.2017.01.004>
- Kim, D. H., & Singleton, K. J. (2012). Term structure models and the zero bound: an empirical investigation of Japanese Yields. *Journal of Econometrics*, 170(1), 32-49. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2011.12.005>
- Kubudi, D., & Vicente, J. (2016). A joint model of nominal and real yield curves. Banco Central do Brasil Working Paper Series No. 452.
- Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, 60(4), 473-489. <https://www.jstor.org/stable/2352957>
- Orphanides, A., & Williams, J. C. (2002). Robust monetary policy rules with unknown natural rates. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2002(2), 63-145. <https://doi.org/10.1353/eca.2003.0007>
- Perrelli, R., & Roache, S. K. (2014). Time-varying neutral interest rate---the case of Brazil. IMF Working Paper 14/84.
- Sack, B. P., & Elsasser, R. (2004). Treasury inflation-indexed debt: a review of the US experience. *Economic Policy Review*, 10(1). <https://ssrn.com/abstract=788044>
- Werner, A. (2023). Monetary policy in Latin America: the easing cycle has begun. Policy Brief 23-16, Peterson Institute for International Economics.

The background features a large, ornate golden swirl design on the left side, set against a solid black background. The swirls are composed of multiple overlapping, curved bands of gold, creating a sense of depth and movement. The main title is positioned in the lower right quadrant of the page.

# **Estadística Aplicada**



## Binary regression model with misclassification and berkson-type measurement error with Student-t distribution

### Modelo de regresión binaria con mala clasificación y error de medición tipo Berkson con Distribución t-Student

Marco Antonio Alves Pereira<sup>1</sup>, Betsabé Grimalda Blas Achic<sup>2</sup>

Recibido: 09/12/2023  
Aceptado: 20/12/2023  
Publicado: 30/12/2023

<sup>1</sup> Universidad Federal do Cariri, Ceará, Brasil  
Correspondencia: [marcos.pereira@ufca.edu.br](mailto:marcos.pereira@ufca.edu.br)

<https://orcid.org/0000-0002-9555-4385>

<sup>2</sup> Universidad Federal de Pernambuco, Pernambuco, Brasil  
Correspondencia: [betsabe@de.ufpe.br](mailto:betsabe@de.ufpe.br)

<https://orcid.org/0000-0002-1236-0930>

Licencia:



Revista de la Facultad de Ingeniería Económica, Ingeniería Estadística y Ciencias Sociales de la Universidad Nacional de Ingeniería

#### ABSTRACT

In this article, we introduce a regression model tailored for fitting binary data affected by misclassification in the response variable and Berkson-type measurement error in the covariate. The conventional assumption of a normal distribution for measurement error may inadequately represent atypical observations present in the dataset. To address this limitation, our model incorporates misclassification in the response variable and Berkson-type measurement error, employing the Student-t distribution for more robust modeling of these atypical observations. We utilize the cumulative distribution function from the Student-t distribution as the link function, enhancing our ability to capture the dataset's unique characteristics. Model parameters are estimated via the maximum likelihood method. We conduct a comprehensive Monte Carlo simulation study to thoroughly assess the impact of measurement errors and misclassification. Additionally, we apply the proposed model to a real-world dataset of survivors from the atomic bombing in Japan, showcasing its adaptability and suitability in practical scenarios. Our findings highlight the robustness and flexibility of this model in effectively handling complex binary regression scenarios involving measurement errors and misclassification.

**Keywords.** *Binary regression model; Berkson-type error; misclassification; Student-t*

## RESUMEN

En este artículo, presentamos un modelo de regresión diseñado para ajustar datos binarios afectados por error de clasificación en la variable respuesta y error de medición tipo Berkson en la covariable. La suposición convencional de distribución normal para el error de medición puede representar inadecuadamente observaciones atípicas presentes en el conjunto de datos. Para abordar esta limitación, nuestro modelo incorpora error de clasificación en la variable respuesta y error de medición tipo Berkson, empleando la Distribución t de Student para modelar de manera más robusta estas observaciones atípicas. Utilizamos la función de distribución acumulativa de la distribución t de Student como la función de enlace, mejorando la capacidad para capturar las características únicas del conjunto de datos. Estimamos los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud. Realizamos un estudio exhaustivo de simulación de Monte Carlo para evaluar minuciosamente el impacto de los errores de medición y el error de clasificación. Además, aplicamos el modelo propuesto a un conjunto de datos reales de sobrevivientes del bombardeo atómico en Japón, demostrando su adaptabilidad y adecuación en escenarios prácticos. Nuestros resultados resaltan la robustez y flexibilidad de este modelo en el manejo efectivo de escenarios de regresión binaria complejos que involucran errores de medición y error de clasificación.

**Palabras clave.** *Modelo de regresión binaria, error del tipo Berkson, error de clasificación, Distribución t-Student.*

## 1. INTRODUCTION

In regression models applied to binary data, it is typical to encounter datasets where certain covariates remain unobserved, leading to biased estimates. Conventional binary regression models operate under the assumption that the observed binary responses are devoid of misclassification, and the independent variables are free from measurement error. However, practical scenarios often involve measurement errors and misclassification, contributing to potential biases and imprecisions in the estimated regression coefficients.

To address these challenges, researchers have proposed various methods to account for measurement error in binary regression models and misclassification in the outcome variable in binary regression models. One approach to tackle measurement error is to assume a known distribution for the measurement errors and estimate the regression parameters using likelihood based methods. This approach, known as the classical measurement error model, has been extensively studied and applied in various fields, including epide-

miology, social sciences, applied social sciences, and environmental sciences. By explicitly modeling the measurement error, it becomes possible to obtain more reliable estimates of the true underlying relationships between variables (Carroll et al., 2006).

Another approach is to model misclassification in the response variable, where the observed binary response may not accurately represent the true underlying response due to misclassification errors. This can be addressed by estimating the probabilities of misclassification and adjusting the model accordingly Ekholm and Palmgren (1982). Carroll et al. (1984) analyzed data from a prospective study on the development of cardiovascular diseases presented in Kannel and Gordon (1968) and demonstrated the impact of measurement errors in binary regression. Burr (1988) investigated measurement errors in Berkson-type covariates in the field of bioassays, employing the probit link function.

In the context of binary response variables, measurement error models become even more challenging due to the presence of misclassification. Several researchers have proposed some models, such as Roy et al. (2005) who developed a measurement error model for misclassified binary responses, where the independent variable is subject to the Berkson-type measurement error which follows the normal distribution. To address departures from normality in measurement errors, Bolfarine and Lachos (2006) considered structural measurement errors following a skew-normal distribution and adopted the probit link function. They employed both classical and Bayesian approaches for parameter estimation, utilizing Markov chain Monte Carlo techniques. Liu and Zhang (2017) conducted a Monte Carlo simulation study with the logistic regression model, employing the logit link function within the classical framework, to demonstrate the presence of non-ignorable biases in parameter estimates when misclassification is disregarded. Bazán et al. (2014) used skew-probit link functions because it deviates from the probit link function in terms of a flexible asymmetry parameter, with Bayesian approach.

In this article, we introduce an innovative regression model designed to tackle the complexities of both measurement error and misclassification in binary data. Berkson-type measurement error occurs when an independent variable isn't directly observed but is derived from a surrogate variable along with measurement error (Roy et al., 2005; Burr, 1988). The conventional assumption of a normal distribution for measurement error often fails to adequately represent unusual observations within the dataset. To address this limitation, we present a flexible modeling framework integrating the Student-t distribution (Lange et al., 1989) to handle the measurement error component.

Moreover, our model incorporates the cumulative distribution function (cdf) from the Student-t distribution as the link function. This link function plays a pivotal role in connecting the linear predictor to the probabilities of the binary response. By employing the cdf from the Student-t distribution as a link function, we enhance our ability to effectively capture the data's unique characteristics and thereby improve the model's overall performance.

For estimating model parameters, we utilize the maximum likelihood method, leveraging the `optimx` (Nash & Varadhan, 2011) library within the R software (R Core Team, 2021). This method ensures efficient and consistent estimators. Additionally, we conduct a comprehensive Monte Carlo simulation study to evaluate how measurement errors and misclassification impact parameter estimation and prediction accuracy. This study provides insights into the model's robustness under various scenarios involving complex data structures.

To showcase the practical application of our proposed model, we applied it to a genuine dataset featuring survivors of the atomic bombings in Japan. Our analysis of this dataset serves to underscore the model's aptness and effectiveness in capturing the intricacies within the data, offering valuable insights and demonstrating its robustness in handling real-world complexities.

The remainder of the article is organized as follows. In Section 2, we present the proposed regression model that incorporates misclassification and measurement error. We estimate the model parameters numerically using the maximum likelihood method. Section 3 provides a simulation study to evaluate the performance of the maximum likelihood estimators. In Section 4, we apply the proposed model on a real data set of survivors of the atomic bomb attacks in Japan. Finally, Section 5 presents concluding remarks.

## 2. THE MODEL

The probit model, a binary linear regression using the probit link function, assumes the response variable follows a binary distribution. It models the relationship between predictors and the probability of the outcome. The probit link function is the cdf of the standard normal distribution, transforming the linear predictor into a probability, ensuring a smooth and symmetric relationship between predictors and the likelihood of success.

Using the cdf offers interpretability advantages. Coefficients estimate the change in the odds of success for a one-unit change in the predictor, making the probit model more interpretable than other link functions. It assumes errors

follow a standard normal distribution, typically reasonable for large sample sizes due to the central limit theorem, resulting in reliable estimates and accurate inference.

However, the probit model is just one option among others (e.g., logit, cloglog) for modeling binary responses. The choice of link function relies on factors like the research context, data characteristics, and specific research questions. Researchers often compare different link functions, selecting the one best fitting the data and yielding the most meaningful results.

We present a regression model tailored for binary data handling Berkson-type measurement errors in covariates, where the error follows a Student-t distribution, including it as the link function. Furthermore, we account for misclassification in the response variable.

In linear models with binary responses, average estimates represent proportions. Various link functions are employed to transform the linear predictor, mapping values from the real line to the interval  $[0, 1]$ . Consequently, a binary regression model can be defined as

$$(1) \quad \mathbb{P}(y_i) = F_G(\beta_0 + \beta_1 w_i), \quad \text{and} \quad F_G^{-1}(\mathbb{P}(y_i)) = \beta_0 + \beta_1 w_i,$$

Where  $F_G(\cdot)$  is the link function,  $y_i$  is the binary response variable with Bernoulli distribution and parameter  $p_i(\theta) = \mathbb{P}(y_i = 1) = \mathbb{P}(y_i)$  is the model parameter vector, and  $w_i$  is the predictor variable,  $i=1, \dots, n$ . We consider the link function to be the cdf of a distribution  $G_i$  belonging to the Student-t distribution (Lange et al., 1989) with location parameter 0, scale parameter 1 and  $v$  degrees of freedom. Thus,  $G_i \sim T(0, 1, v)$ , which implies that  $p_i(\theta) = \mathbb{P}(y_i = 1) = F_G(\beta_0 + \beta_1 w_i, 0, 1, v)$ .

- **Naive model (M1)**

For the naive model, which assumes an absence of misclassification and measurement error, we consider the parameter vector to be estimated as  $\theta_1 = (\beta_0, \beta_1, v)^T$ . The probability of observing  $y_i = 1$ , denoted as  $p_{1i}(\theta_1) = \mathbb{P}(y_i = 1)$ , for  $i=1, \dots, n$  is given by

$$(2) \quad \mathbb{P}(y_i = 1) = F_G(\beta_0 + \beta_1 w_i, 0, 1, v),$$

and is based on the responses  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  and the predictors

$$w = (w_1, \dots, w_n)^T, \text{ with } G_i \sim T(0, 1, v),$$

$$L(\theta_1|y, w) = \prod_{i=1}^n p_{1i}(\theta_1)^{y_i} (1 - p_{1i}(\theta_1))^{1-y_i}.$$

So, we will have the log-likelihood function is then obtained as

$$(3) \quad \ell(\theta_1|y, w) = \sum_{i=1}^n y_i \log(p_{1i}(\theta_1)) + \sum_{i=1}^n (1 - y_i) \log(1 - p_{1i}(\theta_1)),$$

which represents the log-likelihood function for the M1 model, considering (2) and (3), we have

$$\begin{aligned} \ell(\theta_1|y, w) &= \sum_{i=1}^n y_i \log(F_G(\beta_0 + \beta_1 w_i, 0, 1, v)) \\ &+ \sum_{i=1}^n (1 - y_i) \log(1 - F_G(\beta_0 + \beta_1 w_i, 0, 1, v)). \end{aligned} \quad (4)$$

- **Model incorporating misclassification (M2)**

Let  $y_i$ , represent the unobserved or true binary response, and  $\tilde{y}_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , denote the observed binary response. We assume that the probabilities  $\epsilon_0$  and  $\epsilon_1$  of misclassification (Roy et al., 2005) are

$$(5) \quad \mathbb{P}(\tilde{y}_i = 1|y_i = 0) = \epsilon_0, \text{ and } \mathbb{P}(\tilde{y}_i = 0|y_i = 1) = \epsilon_1,$$

Where  $\epsilon_0 + \epsilon_1 < 1$ .

Considering  $\tilde{y}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , with a Bernoulli distribution parameterized by  $p_{2i}(\theta_2) = \mathbb{P}(\tilde{y}_i = 1)$ , we have

$$(6) \quad \mathbb{P}(\tilde{y}_i = 1) = \epsilon_0 + (1 - \epsilon_0 - \epsilon_1)F_G(\beta_0 + \beta_1 w_i, 0, 1, v).$$

A regression model for binary data with misclassification, where the parameter vector is denoted as  $\theta_2 = (\beta_0, \beta_1, \epsilon_0, \epsilon_1, v)^T$ , given the predictors  $w = (w_1, \dots, w_n)^T$  is represented by the log-likelihood function

$$(7) \quad \begin{aligned} \ell(\theta_2|\tilde{y}, w) &= \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \log(\epsilon_0 + (1 - \epsilon_0 - \epsilon_1)F_G(\beta_0 + \beta_1 w_i, 0, 1, v)) \\ &+ \sum_{i=1}^n (1 - \tilde{y}_i) \log(1 - (\epsilon_0 + (1 - \epsilon_0 - \epsilon_1)F_G(\beta_0 + \beta_1 w_i, 0, 1, v))), \end{aligned}$$

where  $\vec{y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)^T$  are the observed responses.

- **Model considering measurement error effects (M3)**

In the regression model with Berkson-type measurements error, the predictor variable  $X_i$  is not directly observed. Instead,  $X_i$  is obtained as the sum of its surrogate  $\omega_i$  and a measurement error  $\delta_i, i=1, \dots, n$ , with  $\delta_i \sim T(0, \sigma^2, v)$  and  $X_i \sim T(\omega_i, \sigma^2, v)$ . Specifically, we have

$$(8) \quad \mathbb{P}(y_i = 1 | X_i) = F_G(\beta_0 + \beta_1 X_i, 0, 1, v), \text{ (Probability of } y_i \text{ given } X_i)$$

$$(9) \quad X_i = \omega_i + \delta_i. \text{ (Measurement error model)}$$

Assuming that the random variables  $X_i$  and  $G_i$  are univariate and independent random variables that constitute the random vector with bivariate Student-t distribution

$$(10) \quad \begin{pmatrix} X_i \\ G_i \end{pmatrix} \sim T_2 \left( \begin{pmatrix} \omega_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v \right),$$

where  $X_i \sim T(\omega_i, \sigma^2, v)$  and  $G_i \sim T(0, 1, v), i=1, \dots, n$ , then we can define the random variable  $Q_i = G_i - \beta_1 X_i \sim T(-\beta_1 \omega_i, 1 + \beta_1^2 \sigma^2, v)$  (Branco & Dey, 2001; Lin, 1972).

For the regression model with binary response with measurement error Berkson-type (8)-(9), considering  $p_{3i}(\theta_3) = \mathbb{P}(y_i = 1)$ , where  $\theta_3 = (\beta_0, \beta_1, \sigma^2, v)^T$ , we have

$$(11) \quad \mathbb{P}(y_i = 1) = \mathbb{E}_X \{ F_G(\beta_0 + \beta_1 X_i, 0, 1, v) \} = F_Q(\beta_0, -\beta_1 \omega_i, 1 + \beta_1^2 \sigma^2, v),$$

where  $G_i$  is the link function  $Q_i = G_i - \beta_1 X_i$  follows a Student-t distribution with location parameter  $-\beta_1 \omega_i$ , scale parameter  $(1 + \beta_1^2 \sigma^2)^{\frac{1}{2}}$ , and  $v$  degrees of freedom and  $F_Q$  is the cdf of  $Q_i$ .

A model for binary data with Berkson-type measurements error, with the parameter vector  $\theta_3 = (\beta_0, \beta_1, \sigma^2, v)^T$ , has the log-likelihood function given by

$$\begin{aligned} \ell(\theta_3 | y, w) &= \sum_{i=1}^n y_i \log(F_Q(\beta_0, -\beta_1 \omega_i, 1 + \beta_1^2 \sigma^2, v)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (1 - y_i) \log(1 - F_Q(\beta_0, -\beta_1 \omega_i, 1 + \beta_1^2 \sigma^2, v)). \end{aligned} \quad (12)$$

- **Model incorporating both measurement error and misclassification (M4)**

We delineate a model that integrates both measurement error and misclassification, building upon the foundations laid by the M2 (6) and M3 (11) models. We consider the probabilities  $\epsilon_0$  and  $\epsilon_1$  of misclassification.

Given the parameter vector  $\theta_4=(\beta_0,\beta_1,\epsilon_0,\epsilon_1,\sigma^2,v)^\top$  and denoting the unobserved binary response as the true value  $\psi_i$ , the observed binary response as  $\tilde{y}_i$ , and the observed variable as  $w_i, i=1, \dots, n$ , the log-likelihood function is expressed as

$$\begin{aligned} \ell(\theta_4|\tilde{y}, w) = & \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \log\left(\epsilon_0 + (1 - \epsilon_0 - \epsilon_1)F_Q(\beta_0, -\beta_1 w_i, 1 + \beta_1^2 \sigma^2, v)\right) \\ & + \sum_{i=1}^n (1 - \tilde{y}_i) \log\left(1 - \left(\epsilon_0 + (1 - \epsilon_0 - \epsilon_1)F_Q(\beta_0, -\beta_1 w_i, 1 + \beta_1^2 \sigma^2, v)\right)\right). \end{aligned} \quad (13)$$

### 3. SIMULATION STUDY

We performed a series of Monte Carlo simulations to examine the effects of misclassification and measurement errors on the coefficient estimates of regression models. In each scenario, we generate 500 Monte Carlo with measurement error following a Student-t distribution and/or with misclassification. Below, we provide a description of the simulation study, mirroring the approach taken by Roy et al. (2005).

1. We generate the variable  $w_i, i = 1, \dots, n$  with uniform distribution in the interval  $(-4,4)$  and these values are kept fixed.
2. We generate the variable  $x_1$ , where  $x_i = w_i + \delta_i$ , with  $x_i$  and  $\delta_i$  following Student-t distributions with  $v = 4$  degrees of freedom, i. e.,  $\delta_i \sim T(0, \sigma^2, 4)$  and  $x_i \sim T(w_i, \sigma^2, 4), i = 1, \dots, 10000$ .
3. We generate the variable  $\psi_i$  with Bernoulli distribution and probability of success  $F_G(\beta_0 + \beta_1 x_i, 0, 1, 4), i = 1, \dots, 10000$ , with  $G_i \sim T(0, 1, 4)$ , according to the scenario considered and with  $\beta_0 = 0$  and  $\beta_1 = 1$ .
4. We generate the variable  $\tilde{y}_i, i = 1, \dots, 10000$ , with misclassification with probabilities prefixed as (5).

5. We fit the generated data  $(\tilde{y}_i, w_i), i = 1, \dots, 10000$ , with the models M1, M2, M3 e M4 presented to estimate the parameters using the maximum likelihood method.
6. Repeat steps 2-5 for 500 replicas and find the estimates  $\hat{\theta}_{kj}, k = 1, \dots, 4$  and  $j = 1, \dots, 500$ , and find the standard errors of  $\hat{\theta}$  through Fisher's information matrix.
7. Calculate the average of  $\hat{\theta}_{kj}, k = 1, \dots, 4$  and  $j = 1, \dots, 500$  and the average of standard errors.
8. Repeat steps 2-7 for different values of  $\epsilon_0, \epsilon_1$  and  $\sigma^2$ .

Table 1-3 display the outcomes of simulations, featuring mean values and standard errors (SE) statistics for the adjusted model parameters. The results are derived from 500 Monte Carlo samples, each comprising 10,000 observations, considering the presence of measurement and/or classification errors. Additionally, for the sake of comparison, adjustments were made using the probit link function (Roy et al., 2005) for models M1, M2, M3, and M4. This involved substituting the cdf of the Student-t distribution (T) with that of the normal distribution (N). Throughout all scenarios,  $\sigma^2$  is assumed to be known.

In Table 1, showcasing simulation results where data exclusively incorporated misclassification, we note smaller biases in adjustments employing the Student-t distribution in contrast to adjustments with the normal distribution. This pattern holds true when comparing models M2 and M1. The superiority of the M2 model with Student-t becomes more pronounced with escalating probabilities of misclassification, as expected. Notably, the Student-t degrees of freedom estimated with the M1 model are significantly smaller than those estimated with M2, emphasizing the need for a distribution with heavy tails, particularly since M1 does not factor in misclassification. Additionally, it's worth mentioning that the SEs of M2 are larger due to the incorporation of additional parameters into the model.

**Table 1.**

The mean and SE of model parameters for M1 and M2 are derived from 500 Monte Carlo samples, each comprising 10, 000 observations. The data were generated with misclassification and without measurement error in three distinct scenarios.

$\theta$	N		T	
	M1		M2	
$(\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma^2) = (0.01, 0.01, 0)$				
$\beta_0$	-0.003 (0.017)	0.000 (0.026)	0.000 (0.026)	0.000 (0.030)
$\beta_1$	0.687 (0.011)	1.044 (0.055)	0.882 (0.028)	1.004 (0.071)
$\epsilon_0$	— (—)	— (—)	0.024 (0.004)	0.008 (0.011)
$\epsilon_1$	— (—)	— (—)	0.024 (0.004)	0.008 (0.011)
$\nu$	— (—)	2.741 (0.349)	— (—)	4.662 (3.451)
$(\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma^2) = (0.05, 0.05, 0)$				
$\beta_0$	-0.004 (0.015)	-0.005 (0.032)	-0.003 (0.031)	0.000 (0.036)
$\beta_1$	0.535 (0.008)	1.116 (0.077)	0.894 (0.036)	1.008 (0.085)
$\epsilon_0$	— (—)	— (—)	0.065 (0.006)	0.048 (0.017)
$\epsilon_1$	— (—)	— (—)	0.061 (0.006)	0.045 (0.017)
$\nu$	— (—)	1.316 (0.124)	— (—)	4.762 (4.983)
$(\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma^2) = (0.1, 0.1, 0)$				
$\beta_0$	0.005 (0.015)	-0.005 (0.039)	0.001 (0.038)	0.000 (0.044)
$\beta_1$	0.427 (0.007)	1.166 (0.109)	0.907 (0.048)	1.022 (0.104)
$\epsilon_0$	— (—)	— (—)	0.112 (0.007)	0.095 (0.021)
$\epsilon_1$	— (—)	— (—)	0.114 (0.007)	0.098 (0.021)
$\nu$	— (—)	0.781 (0.072)	— (—)	4.695 (6.622)

In Table 2, we present simulation results based on data generated to incorporate measurement error. The models utilizing the Student-t distribution stand out, demonstrating superior performance with the smallest biases. Notably, as we increase  $\sigma^2$ , all models exhibit a noticeable rise in bias in estimating  $\beta_1$ . This trend is similarly observed concerning  $\nu$  when employing the Student-t distribution.

**Table 2.**

The mean and SE of model parameters for M1 and M3 are calculated from 500 Monte Carlo samples, each comprising 10, 000 observations. The datasets were generated to include measurement error and exclude misclassification in three distinct scenarios.

$\theta$	N	T	N	T
	M1		M3	
	$(\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma^2) = (0, 0, 0.01)$			
$\beta_0$	-0.002 (0.018)	-0.001 (0.024)	-0.001 (0.018)	-0.001 (0.024)
$\beta_1$	0.747 (0.012)	0.987 (0.047)	0.749 (0.013)	0.994 (0.048)
$\epsilon_0$	— (—)	— (—)	— (—)	— (—)
$\epsilon_1$	— (—)	— (—)	— (—)	— (—)
$\nu$	— (—)	4.252 (0.730)	— (—)	4.228 (0.726)
	$(\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma^2) = (0, 0, 0.1)$			
$\beta_0$	0.000 (0.017)	0.002 (0.023)	0.000 (0.018)	0.000 (0.024)
$\beta_1$	0.717 (0.012)	0.916 (0.043)	0.733 (0.013)	0.956 (0.049)
$\epsilon_0$	— (—)	— (—)	— (—)	— (—)
$\epsilon_1$	— (—)	— (—)	— (—)	— (—)
$\nu$	— (—)	4.651 (0.897)	— (—)	4.631 (0.895)
	$(\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma^2) = (0, 0, 0.5)$			
$\beta_0$	-0.002 (0.017)	0.000 (0.020)	0.000 (0.019)	0.000 (0.024)
$\beta_1$	0.619 (0.010)	0.741 (0.035)	0.687 (0.014)	0.871 (0.057)
$\epsilon_0$	— (—)	— (—)	— (—)	— (—)
$\epsilon_1$	— (—)	— (—)	— (—)	— (—)
$\nu$	— (—)	5.697 (1.636)	— (—)	5.735 (1.640)

**Table 3.**

The mean and SE of parameters for models M1, M2, M3, and M4 are computed from 500 Monte Carlo samples, each with a size of 10, 000, generated to incorporate both measurement error and misclassification.

$\theta$	N	T	N	T
	$(\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma^2) = (0.05, 0.05, 0.1)$			
	M1		M2	
$\beta_0$	0.005 (0.016)	-0.003 (0.030)	0.002 (0.032)	-0.002 (0.036)
$\beta_1$	0.523 (0.008)	1.002 (0.068)	0.833 (0.034)	0.929 (0.077)
$\epsilon_0$	— (—)	— (—)	0.062 (0.006)	0.043 (0.020)
$\epsilon_1$	— (—)	— (—)	0.065 (0.006)	0.044 (0.021)
$\nu$	— (—)	1.422 (0.148)	— (—)	4.781 (5.556)
	M3		M4	
$\beta_0$	-0.005 (0.016)	0.002 (0.031)	0.000 (0.032)	-0.001 (0.038)
$\beta_1$	0.537 (0.009)	1.057 (0.080)	0.867 (0.038)	0.979 (0.090)
$\epsilon_0$	— (—)	— (—)	0.063 (0.006)	0.041 (0.022)
$\epsilon_1$	— (—)	— (—)	0.064 (0.006)	0.042 (0.022)
$\nu$	— (—)	1.421 (0.146)	— (—)	4.738 (5.709)

Table 3 highlights that models utilizing the Student-t distribution generally yield superior results, exhibiting smaller biases across most scenarios. Notably, estimates of the parameter  $\beta_1$  in models M1 and M3, under the normal distribution, displayed the most significant biases. Additionally, under the Student-t distribution, the estimated values of  $v$  are consistently below 2, emphasizing the requirement for a distribution with heavy tails and rendering adjustments with the normal distribution inappropriate. The M4 model under the Student-t distribution, on the whole, delivered accurate estimates for all parameters.

#### 4. APPLICATION

The dataset under examination in this analysis pertains to survivors of the atomic bombings conducted by the United States on the cities of Hiroshima and Nagasaki in Japan. Those who survived or resided in nearby areas experienced the effects of radiation exposure, leading to health issues, including cancer. The data utilized in this study, as sourced from Sposto et al. (1992), originates from a research initiative commenced 5 years after the atomic bombings. The primary objective of this study was to assess the impact of radiation exposure on cancer-related deaths. The cohort consisted of 86,520 survivors of the attacks, categorized into exposed and non-exposed groups based on their proximity to the bomb blast (< 2km, 2 to 10 km). These survivors were monitored from 1950 to 1985.

Table 4 presents information on radiation exposure dose, mean radiation exposure dose, number of cancer deaths, number of deaths from other causes, and the proportion of cancer deaths among the 31, 037 individuals studied. Measurement errors in radiation doses depend on location and biological reasons, as individuals can absorb different amounts of radiation despite having the same exposure conditions. Radiation exposure dose is measured using dosimetry, which quantifies the radiation doses to which an individual (or living being) may be exposed. Data were collected on various types of cancer, including lung, mouth, intestine, breast, prostate, among others. However, the radiation doses absorbed by the intestine at the time of exposure were selected as the reference dose.

**Table 4.**

*Number of cancer and non-cancer deaths among the atomic bomb survivors in Hiroshima and Nagasaki corresponding to 10 dose categories.*

Dose	Mean dose	Cancer deaths	Non-cancer deaths	Proportion
0.00	0.000	2784	10201	0.2144
0.01 - 0.05	0.018	2105	7451	0.2203
0.06 - 0.09	0.072	439	1509	0.2253
0.10 - 0.19	0.137	523	1701	0.2352
0.20 - 0.49	0.324	586	1785	0.2471
0.50 - 0.99	0.693	339	826	0.2910
1.00 - 1.99	1.350	204	369	0.3560
2.00 - 2.99	2.350	57	86	0.3986
3.00 - 3.99	3.520	21	51	0.2917
≥ 4.00	4.430	13	26	0.3611

We applied the four studied models to fit the dataset, considering the cdf of both the Student-t (T) and normal (N) distributions as link functions in each model. For models involving measurement error, the substitute variable  $w_i$  represents the average dose observed for each category, while the variable  $x_i$  represents the true dose. Thus, we make the assumption that  $X_i \sim T(\omega, \sigma_i^2, \nu)$ , where  $\sigma_i^2 = c\omega_i^2$  and  $c=0.5$  (Roy et al., 2005),  $i=1, \dots, 31,037$ . The focal point of this application is to assess the adequacy of the M4 model with Student-t in describing the data. Table 5 provides the estimated values of the parameters for models M1, M2, M3, and, M4 along with the corresponding SEs and the p-values obtained through Wald statistics.

**Table 5.**

*Model comparison: parameter estimates, SEs, p-values, AIC and BIC criteria for M1, M2, M3, and M4 fitted to data from atomic bomb survivor in Hiroshima and Nagasaki, Japan.*

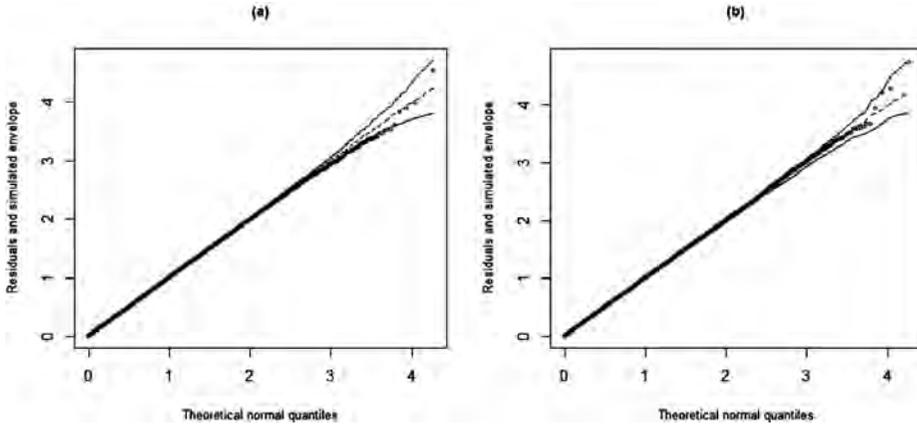
$\theta$	N			T			N			T		
	Estim.	(S.E.)	p-value									
	M1						M2					
$\beta_0$	-0.775	(0.008)	<0.001	-0.775	(0.008)	<0.001	-0.054	(0.229)	0.008	-0.594	(0.209)	0.002
$\beta_1$	0.225	(0.023)	<0.001	0.226	(0.022)	<0.001	0.282	(0.034)	<0.001	0.309	(0.006)	<0.001
$\epsilon_0$	—	(—)	—	—	(—)	—	0.000	(0.093)	0.500	0.000	(0.091)	0.500
$\epsilon_1$	—	(—)	—	—	(—)	—	0.250	(0.159)	0.058	0.250	(0.115)	0.015
$\nu$	—	(—)	—	>100	(356)	0.390	—	(—)	—	4.110	(4.552)	0.183
AIC	33188			33190			33189			33192		
BIC	33205			33215			33223			33234		
	M3						M4					
$\beta_0$	-0.775	(0.008)	<0.001	-0.779	(0.017)	<0.001	-0.607	(0.289)	0.018	-0.727	(0.296)	0.007
$\beta_1$	0.229	(0.024)	<0.001	0.230	(0.025)	<0.001	0.284	(0.046)	<0.001	0.357	(0.021)	<0.001
$\epsilon_0$	—	(—)	—	—	(—)	—	0.001	(0.096)	0.495	0.001	(0.116)	0.496
$\epsilon_1$	—	(—)	—	—	(—)	—	0.021	(0.144)	0.083	0.200	(0.089)	0.012
$\nu$	—	(—)	—	>100	(489)	0.419	—	(—)	—	1.095	(2.101)	0.164
AIC	33187			33189			33187			33190		
BIC	33204			33214			33221			33232		

In the results presented in Table 5, we observed that the estimated values of parameters for models M1 and M3 are notably similar. The Wald statistics indicate that the estimated degrees of freedom under the Student-t distribution are not significant; they are, in fact, zero, suggesting a distribution with heavy tails for a more appropriate fit. In the case of the M2 model, the estimated value of  $\epsilon_1$  is not significant when considering the normal distribution at a 0.05 significance level, but it becomes significant with the Student-t distribution. Similarly, for the M4 model with the Student-t distribution,  $\epsilon_1$  is significant, but the degree of freedom, as per the Wald test, is not, indicating the necessity for an adjustment with a distribution featuring heavy tails.

According to the AIC criterion, the most suitable models are M3 and M4 under the normal distribution. Notably, the M3 model with the normal distribution also presents the lowest BIC. Given the observed existence of classification and measurement errors alongside a distribution with heavy tails, we propose the use of the M4 model for this application.

In Figure 1, we present graphs featuring randomized quantile residuals, as proposed by Dunn and Smyth (1996). These residuals tend to converge to the standard normal distribution when the model parameters are estimated consistently (Pereira & Russo, 2019). Additionally, we include their simulated confidence bands, constructed at a 0.95 confidence level using the *hnp* (de Andrade et al., 2017) library, for both the fit M1 (N) and the more appropriate fit M4 (T). Notably, the simulated envelope graph under the M1 model and the normal distribution appears unsuitable for the dataset. In such cases, the preferred option is adjusting with the M4 model and the Student-t distribution, characterized by heavy tails and accounting for both measurement error and misclassification.

**Figure 1.**  
*Simulated envelopes for the randomized quantile residuals: (a) M1 normal (b) M4 Student-t*



## 5. CONCLUDING REMARKS

In this study, we adopt the assumption that the measurement error in the covariate adheres to a Student-t distribution, and the binary response is subject to misclassification. Utilizing the cdf of the Student-t distribution as a link function, the M4 model presented in this article proves valuable for modeling the mean of a binary response with both classification and measurement errors in the covariate. This model is particularly suited for adjusting data where the measurement error does not follow a normal distribution.

Parameter estimation was performed using the maximum likelihood method with the R software (R Core Team, 2021) and the optimx (Nash & Varadhan, 2011) library.

Simulations demonstrate the superiority of models considering some form of error and employing the Student-t distribution compared to the M1 model and models with the normal distribution, especially when  $\epsilon_0, \epsilon_2$ , and  $\sigma^2$  are involved. Generally, models M2 and M4 exhibit higher SEs due to their greater number of parameters.

In the final application, we employed data concerning the health effects on survivors of the atomic bombings in Hiroshima and Nagasaki in 1945, revealing a Berkson-type measurement error with a distribution featuring heavy tails. Among the models studied, it was observed that M1 and M3 provide similar estimates of coefficients  $\beta_0$  and  $\beta_1$ . However, the M4 model with the Student-t distribution yields notably different parameter estimates from the other models. Importantly, considering measurement error and misclassification observed in the data, the M4 model with the Student-t distribution emerges as the most suitable choice, supported by Wald statistics and simulated envelope graphs.

## 6. REFERENCES

- Bazán, J. L., Romeo, J. S., & Rodrigues, J. (2014). Bayesian skew-probit regression for binary response data. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 28(4), 467-482. <https://doi.org/10.1214/13-BJPS218>
- Bolfarine, H., & Lachos, V. H. (2006). Skew binary regression with measurement errors. *Statistics*, 40(6), 485-494. <https://doi.org/10.1080/02331880600589270>
- Branco, M. D., & Dey, D. K. (2001). A general class of multivariate skew-elliptical distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 79(1), 99-113. <https://doi.org/10.1006/jmva.2000.1960>
- Burr, D. (1988). On errors-in-variables in binary regression—Berkson case. *Journal of the American Statistical Association*, 83(403), 739-743. <https://doi.org/10.1080/01621459.1988.10478656>
- Carroll, R. J., Spiegelman, C. H., Lan, K. G., Bailey, K. T., & Abbott, R. D. (1984). On errors-in-variables for binary regression models. *Biometrika*, 71(1), 19-25. <https://doi.org/10.1093/biomet/71.1.19>
- Carroll, R. J., Ruppert, D., Stefanski, L. A., & Crainiceanu, C. M. (2006). *Measurement error in nonlinear models: a modern perspective*. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781420010138>
- de Andrade Moral, R., Hinde, J., & García Borges Demétrio, C. (2017). Half-normal plots and overdispersed models in R: the hnp package. *Journal of Statistical Software*, 81(10). <https://doi.org/10.18637/jss.v081.i10>
- Dunn, P. K., & Smyth, G. K. (1996). Randomized quantile residuals. *Journal of Computational and graphical statistics*, 5(3), 236-244. <https://doi.org/10.1080/10618600.1996.10474708>
- Ekholm, A., & Palmgren, J. (1982). A model for a binary response with misclassifications. In *GLIM 82: Proceedings of the international conference on generalised linear models* (pp. 128-143). Springer New York. [https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5771-4\\_13](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5771-4_13)
- Kannel, W. B., & Gordon, T. (1968). *The Framingham Study: an epidemiological investigation of cardiovascular disease*. United States. Department of Health, Education, and Welfare, National Institutes of Health.
- Lange, K. L., Little, R. J., & Taylor, J. M. (1989). Robust statistical modeling using the t distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 84(408), 881-896. <https://doi.org/10.1080/01621459.1989.10478852>

- Lin, P. E. (1972). Some characterizations of the multivariate t distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 2(3), 339-344. [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(72\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0047-259X(72)90021-8)
- Liu, H., & Zhang, Z. (2017). Logistic regression with misclassification in binary outcome variables: a method and software. *Behaviormetrika*, 44(2), 447-476. <https://doi.org/10.1007/s41237-017-0031-y>
- Nash, J. C., & Varadhan, R. (2011). Unifying optimization algorithms to aid software system users: optimx for R. *Journal of Statistical Software*, 43, 1-14. <https://doi.org/10.18637/jss.v043.i09>
- Pereira, M. A. A., & Russo, C. M. (2019). Nonlinear mixed-effects models with scale mixture of skew-normal distributions. *Journal of Applied Statistics*, 46(9), 1602-1620. <https://doi.org/10.1080/02664763.2018.1557122>
- R Core Team, R. (2021). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing.
- Roy, S., Banerjee, T., & Maiti, T. (2005). Measurement error model for misclassified binary responses. *Statistics in medicine*, 24(2), 269-283. <https://doi.org/10.1002/sim.1886>
- Sposto, R., Preston, D. L., Shimizu, Y., & Mabuchi, K. (1992). The effect of diagnostic misclassification on non-cancer and cancer mortality dose response in A-bomb survivors. *Biometrics*, 48(2), 605-617. <https://www.jstor.org/stable/2532315>

## Convergencia de procesos aleatorios unidimensionales

### Convergence of one-dimensional random processes

Roberto Vila

Universidade de Brasília, Brasília, Brasil

#### RESUMEN

En este trabajo desenvolvemos extensivamente algunos de los resultados obtenidos en la referencia (Cioletti et al., 2017). Usamos la distancia de Wasserstein para obtener algunos teoremas del tipo límite central para procesos aleatorios unidimensionales que tienen dependencia asociada positiva.

**Palabras claves:** *Distancia de Wasserstein; Proceso aleatorio, Asociado positivo.*

#### ABSTRACT

In this paper we extensively develop some of the results obtained in reference (Cioletti et al., 2017). We use the Wasserstein distance to obtain some central limit type theorems for one-dimensional random processes having positive associated dependence.

**Keywords:** *Wasserstein distance; Random process, Positive associate.*

Recibido: 09/12/2023  
Aceptado: 20/12/2023  
Publicado: 30/12/2023

Departamento de Estadística, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil  
Correspondencia: rovig161@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0003-1073-0114>

Licencia:



Revista de la Facultad de Ingeniería Económica, Ingeniería Estadística y Ciencias Sociales de la Universidad Nacional de Ingeniería

## 1. INTRODUCCIÓN

La distancia de Wasserstein  $W_r(\mu, \nu)$ , también conocida como Monge-Kantorovich-Rubinstein (Kantorovič & Rubištejn, 1958; Jordan et al., 1998), distancia de Mallows (1972) o distancia de transporte óptima en optimización (Ambrosio, 2003), es responsable de medir la discrepancia entre dos medidas de probabilidades  $\mu$  y  $\nu$ . Esta métrica ha sido aplicada con éxito en una amplia variedad de campos, por ejemplo, Gray (2009), Rachev y Rüschendorf (1998), Sommerfeld y Munk (2018), Otto (2001) y Villani (2003, 2009). Sobre los números reales, esta distancia cuantifica la discrepancia entre dos funciones de distribución (acumulativas)  $F$  y  $G$ . Si  $F$  y  $G$  son las funciones de distribución de dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , respectivamente. El Teorema de representación de Dorea y Ferreira (2012) nos permite escribir,  $W_r^r(F, G) = \mathbb{E}_H |X^* - Y^*|^r$ , si  $r \geq 1$ , donde  $H(x, y) = F(x) \wedge G(y)$  es el límite superior de Frèchet. Además, puede ser demostrado que la representación  $W_r^r(F, G) = \mathbb{E}_K |X' - Y'|^r$ , donde  $K(x, y) = 0 \vee [F(x) + G(y) - 1]$  es el límite inferior de Frèchet, es válida en el caso que  $0 < r < 1$ . Usando esas representaciones y el conocido Teorema de Bickel y Freedman (1981),

$$(1) \quad W_r(F_n, F) \xrightarrow{n} 0 \Leftrightarrow F_n \xrightarrow{d} F; \quad y; \quad \int |x|^r dF_n(x) \xrightarrow{n} \int |x|^r dF(x),$$

el cual proporciona una estrecha relación con la convergencia en distribución  $\left(\xrightarrow{d}\right)$ , en este trabajo haremos uso de la distancia de Wasserstein (Vaserstein, 1969) para analizar el comportamiento asintótico de procesos aleatorios unidimensionales que tienen dependencia asociada positiva. Ejemplos de procesos aleatorios que exhiben este tipo de comportamiento, por medio de  $W_r$ , usualmente son encontrados en la Mecánica Estadística, por ejemplo, en modelos ferromagnéticos tipo Ising con espines discretos y continuos, para mayores detalles, vea referencia (Cioletti et al., 2017).

## 2. LA DISTANCIA DE WASSERTEIN

En esta sección presentamos algunos conceptos de asociación positiva y de distancia de Wasserstein. En seguida, enunciamos algunos resultados preliminares que utilizaremos a lo largo de la exposición de este trabajo. Así mismo, cerramos esta sección con algunas definiciones adicionales.

## 2.1. ASOCIACIÓN POSITIVA

Denote por  $\mathbb{Z}$  al conjunto de los números enteros. Consideraremos procesos aleatorios del siguiente tipo  $\{X_j: j \in \mathbb{Z}\}$ , los cuales son definidos sobre algún espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , y están asociados positivamente de acuerdo a la siguiente definición.

**Definición 1.** *Un proceso aleatorio  $\{X_j: j \in \mathbb{Z}\}$ , es asociado positiva si, dadas dos funciones coordenadas no decrecientes  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z}$ , tenemos*

$$\text{cov} \left( f(X_{j_1}, \dots, X_{j_n}), g(X_{j_1}, \dots, X_{j_n}) \right) \geq 0,$$

(Gabriel, 2017)

siempre que la covarianza exista.

Decimos que una función  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es no decreciente si  $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$ , siempre que  $x_j \leq y_j$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ . Algunos ejemplos de procesos asociados positivamente son los siguientes:

**Ejemplo 2.** *Cualquier conjunto de variables aleatorias independientes está asociado positivamente (Esary et al., 1967).*

**Ejemplo 3.** *Variables aleatorias con distribución Gaussiana multivariada y con covarianza positiva están asociadas positivamente (Pitt, 1982).*

**Ejemplo 4.** *Sean  $\{X'_i: i \geq 1\}$  independiente e idénticamente distribuidos y sea  $Y$  independiente de  $\{X'_i: i \geq 1\}$ , entonces,  $\{X_i = X'_i + Y: i \geq 1\}$  es asociado positivo (Barlow & Proschan, 1975).*

**Lema 5.** *Sea  $\{X_j: j \in \mathbb{Z}\}$  un proceso aleatorios asociado positiva; Para  $m_j \geq 1$ , si  $f_j: \mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones coordenadas no decrecientes, entonces  $\{f_j(X_{i_1}, \dots, X_{i_{m_j}}): i_1, \dots, i_{m_j} \in \mathbb{Z}\}$ , también, es asociado positivo (Oliveira, 2012).*

Ahora, con el Lema 5 a nuestra disposición, es sencillo generar nuevas familias de variables aleatorias asociadas positivamente a partir de un conjunto de variables aleatorias con esta propiedad, al aplicar transformaciones monótonas.

**Ejemplo 6.** Si  $X_n, n \in \mathbb{N}$ , son variables aleatorias asociadas positivas, entonces, la secuencia de sumas parciales  $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \in \mathbb{N}$  esta asociada positivamente. Esto es una consecuencia inmediata del Lema 5.

**Ejemplo 7.** Dadas las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$ , definan las estadísticas ordenadas  $X_{k:n} =$  “el  $k$ -ésimo más pequeño entre  $X_1, \dots, X_n$ ”. Estas estadísticas de orden son transformaciones no decrecientes de  $X_1, \dots, X_n$ , consecuentemente, estas estadísticas de orden están asociadas positivamente, lo mismo se aplica a  $X_1, \dots, X_{n:n}$ .

**Ejemplo 8.** Dada una secuencia de variables aleatorias  $Y_n$ , con  $n \in \mathbb{N}$  fijo, defina  $X_n = \max \{Y_n, Y_{n+1}, \dots, Y_{n+m}\}$ , con  $m \in \mathbb{N}$  fijo. Si los  $Y_n$  están asociadas, también lo están los  $X_n$ .

## 2.2. DISTANCIA DE WASSERSTEIN

En esta parte definimos el concepto de distancia de Wasserstein (Mallows, 1972; Newman, 1980) y establecemos una equivalencia con la definición de distancia Mallows que aparecen en las referencias (Bickel & Freedman, 1981; Dorea & Ferreira, 2012; Mallows, 1972) (ver Lema 10).

Sea  $(\Omega, \mathfrak{F})$  un espacio medible correspondiente a un experimento aleatorio dado. Denotando por  $\mathfrak{B}(\Omega)$  a la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos de  $\Omega$ , definimos la colección de todas las medidas de probabilidad sobre  $\mathfrak{B}(\Omega)$  por  $\mathcal{M}_1(\Omega)$ .

Supongamos que estamos encargados del “transporte de mercancías” entre productores e consumidores, cuyas distribuciones espaciales son modeladas por las medidas de probabilidad  $\mu$  y  $\nu$ . Si los productores y consumidores estan localizados a una distancia mayor, más difícil será nuestro trabajo. Luego, nos gustaría resumir el “grado de dificultad” con apenas una cantidad. Para ello, es natural considerar el “costo óptimo de transporte” entre las medidas  $\mu$  y  $\nu$  como

$$C(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^2} c(x, y) d\pi(x, y),$$

(Gabriel, 2017)

donde  $c(x, y)$  denota el costo de transporte de una unidad de masa de  $x$  para  $y$  y el conjunto

$$(2) \quad \Pi(\mu, \nu) = \{\pi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2) : \text{Proy}_1 \pi = \mu \text{ y } \text{Proy}_2 \pi = \nu\}$$

(Gabriel, 2017)

está constituido por todos los acoplamientos  $\pi$  de  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ , conocidos como planos de transporte.

Aquí,  $(\text{Proy}_1 \pi)(A \times \mathbb{R})$  y  $(\text{Proy}_2 \pi)(\mathbb{R} \times B) = \pi(\mathbb{R} \times B)$ , para cada borelianos  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}$ , son las proyecciones sobre la medida  $\pi$ . En terminos simples,  $\Pi(\mu, \nu)$  es el conjunto de todas las medidas de probabilidad  $\pi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^2)$  con marginales  $\mu$  y  $\nu$ , respectivamente. En general  $C$  no es una distancia. En el caso que  $c$  sea una distancia, entonces  $C$  es una distancia (métrica), también.

**Definición 9** (Distancia de Wasserstein). Sea  $(\mathbb{R}, d)$  un espacio métrico, con métrica dada por  $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ . La distancia de Wasserstein de orden  $r > 0$  entre dos medidas de probabilidad  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  se define mediante la siguiente fórmula (Mallows, 1972; Villani, 2009):

$$W_r(\mu, \nu) = \left\{ \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^2} d(x, y)^r d\pi(x, y), \right\}^{\frac{1}{r}},$$

donde  $\Pi(\mu, \nu)$  es el conjunto definido en (2).

Algunos casos particulares de la distancia de Wasserstein son conocidos, por ejemplo (Gabriel, 2017):

- $\mathcal{W}_1(\mu, \nu) = \sup_{\|\psi\|_{Lip} \leq 1} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \psi d(\mu - \nu) \right\}$ , esa expresión es llamada “fórmula de dualidad para la distancia de Kantorovich-Rubinstein”, para mayores detalles, ver Villani (2003). Aquí el supremo es tomado sobre todas las funciones Lipschitzianas (limitadas)  $\psi$  que están dentro de la bola unitaria, según la norma  $\|\psi\|_{Lip} = \max\{k_1(\psi), k_2(\psi)\}$ , donde  $k_1(\psi) = \frac{\sup_{x \neq y} |\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|}$  y  $k_2(\psi) = 2 \sup_x |\psi(x)|$ .
- $\mathcal{W}_r(\delta_x, \delta_y) = d(x, y), r > 0$ , donde  $\delta_x$  y  $\delta_y$  son medidas de delta de Dirac concentradas en los puntos fijos  $x$  e  $y$ , respectivamente.
- Si  $d$  es una métrica discreta, es decir  $d(x, y) = \mathbb{1}_{\{x \neq y\}}$ , entonces  $\mathcal{W}_r(\mu, \nu) = \left(\frac{1}{2}\right) \|\mu - \nu\|_{VT}$  ver [21]), donde  $\|\mu - \nu\|_{VT} =$

$2 \sup_{A \in \mathfrak{F}} |\mu(A) - \nu(A)|$  denota la distancia de variación total entre  $\mu$  y  $\nu$ .

El siguiente resultado nos ofrece una caracterización de la distancia de Wasserstein en el caso que  $\mathbb{R}$  está equipado con la métrica euclidiana. La prueba de este resultado puede ser encontrado en el Apéndice A. En algunas referencias, vea por ejemplo (Bickel & Freedman, 1981; Dorea & Ferreira, 2012; Mallows, 1972), esta medida es conocido como distancia Mallows.

**Lema 10.** *En la Definición 9, considere  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $\mu = F$  y  $\nu = G$  dos funciones de distribución (acumulativa). Entonces, la distancia de Wasserstein de orden  $r > 0$  entre  $F$  y  $G$  es dada por*

$$W_r(F, G) = \left\{ \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}|X - Y|^r \right\}^{\frac{1}{r}},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los pares de variables aleatorios  $(X, Y)$  cuyas distribuciones marginales son  $F$  y  $G$ , respectivamente.

Tenga en cuenta que, estrictamente hablando,  $W_r$ , como definido anteriormente, no es una distancia sobre el espacio de las funciones de distribución, ya que esta definición admite la posibilidad  $W_r(F, G) = \infty$ . Pero esto no crea ningún inconveniente, para que esta definición tenga sentido las distribuciones  $F$  y  $G$  deben tener un momento (absoluto) de orden  $r$  finito. Formalmente, definimos el espacio de distribuciones que tienen esta propiedad por

$$\mathcal{P}_r = \left\{ F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]: \begin{array}{l} F \text{ es una función de distribución tal que} \\ \int_{\mathbb{R}} |x|^r dF(x) < \infty \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Este espacio fue introducido por Bickel y Freedman (1981) para mostrar que, para  $r \geq 1$  la función  $W_r : \mathcal{P}_r \times \mathcal{P}_r \rightarrow [0, \infty)$  en el Lema 10 es una métrica.

**Observación 11.** *De aquí en adelante, en este trabajo, usaremos la definición de la distancia de Wasserstein providenciada por el Lema 10. Esto es, consideraremos la Definición 9 consideramos la métrica euclidiana  $d(x, y) = |x - y|$ .*

### 2.3. RESULTADOS Y DEFINICIÓN PRELIMINARES

A continuación recopilamos algunos resultados, propiedades y definiciones necesarias para las pruebas de este trabajo.

**Lema 12** (Newman & Wright, 1981). Sea  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$  un proceso aleatorio asociado positivo; Si todos los  $X_j$ 's poseen un segundo momento finitom entonces las funciones características  $\phi_j(r_j) = \mathbb{E}(\exp\{ir_j X_j\})$  y

$$\phi(r_1, \dots, r_n) = \mathbb{E}(\exp\left\{i \sum_{j=1}^n r_j X_j\right\})$$

satisfacen

$$\left| \phi\left(r_1, \dots, r_n\right) - \prod_{j=1}^n \phi_j(r_j)\right| \leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \neq k \leq n} |r_j r_k| \text{cov}(X_j, X_k).$$

El lema 12 nos informa que, para procesos aleatorios asociados positivos cuyas combinaciones lineales de las covarianzas poseen un determinado decaimiento a medida que  $n$  crece, el proceso puede ser considerado asintóticamente independiente.

Asuma que  $X, Y$  y  $(X, Y)$  tienen distribuciones  $F, G$  y  $H$ , respectivamente, donde  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$H(x, y) = F(x) \wedge G(y) = \min\{F(x), G(y)\}.$$

El siguiente resultado (Teorema 13) facilita la evaluación de  $W_r(F, G)$ , pues en este caso la distancia de Wassersteins  $W_r(F, G)$ , con  $r \geq 1$ , es alcanzado por el  $r$ -ésimo momento de  $|X - Y|$  con respecto a la distribución  $H$ .

**Teorema 13** (Dorea & Ferreira, 2012). Para  $r \geq 1$  la distancia de Wasserstein del Lema 10 puede ser escrita como

$$\begin{aligned} W_r^r(F, G) &= \mathbb{E}|F^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^r \\ &= \int_0^1 |F^{-1}(u) - G^{-1}(u)|^r du \\ &= \mathbb{E}_H |X - Y|^r = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r dH(x, y), \end{aligned}$$

donde  $U$  es uniformemente distribuida sobre el intervalo  $(0,1)$  y

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1,$$

(Gabriel, 2017)

denota la inversa generalizada.

La representación de la distancia de Wasserstein del Teorema 13 no es válida para  $0 < r < 1$ , incluso cuando el momento de orden  $r$  es finito, como se muestra en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 14.** Sean  $X \in \{1, 2\}$  e  $Y \in \{3, 4\}$  dos variables aleatorias discretas con respectivas funciones de probabilidades dadas por

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3} = 1 - \mathbb{P}(X = 2), \quad \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{3}{4} = 1 - \mathbb{P}(Y = 4).$$

Denota por  $F$  y  $G$  a las funciones de distribución de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Supongamos que  $(X, Y) \stackrel{d}{=} 0 \vee [F + G - 1]$  y que  $(X^*, Y^*) \stackrel{d}{=} F \wedge G$ , es decir, las funciones de distribución de  $(X, Y)$  y  $(X^*, Y^*)$ , respectivamente, son definidas como,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$F_{X,Y}(x, y) = \max\{0, F(x) + G(y) - 1\},$$

$$F_{X^*,Y^*}(x, y) = \min\{F(x), G(y)\}.$$

Vemos las distribuciones de probabilidades de  $(X, Y)$  y  $(X^*, Y^*)$  son explícitamente dadas en la Tabla 1:

**Tabla 1**

Distribuciones de probabilidades de  $(X, Y)$  y  $(X^*, Y^*)$ .

	$X \setminus Y$	$3$	$4$
$1$		$5/12$	$1/4$
$2$		$1/3$	$0$

	$X^* \setminus Y^*$	$3$	$4$
$1$		$2/3$	$0$
$2$		$1/12$	$1/4$

Observe que

$$\mathbb{E}|X^* - Y^*|^r - \mathbb{E}|X - Y|^r = \frac{2^{r+1} - 3^r - 1}{4}.$$

Una vez que la función  $r \rightarrow \frac{2^{r+1} - 3^r - 1}{4}$  es positiva,  $\forall 0 < r < 1$ , tenemos que  $\mathbb{E}|X^* - Y^*|^r - \mathbb{E}|X - Y|^r > 0$ .

Por lo tanto, para cualquier  $0 < r < 1$  no es posible obtener una representación de la distancia de Wasserstein como la del Teorema 13.

**Observación 15.** Una generalización del Ejemplo 14 puede ser encontrada en la referencia (Dorea & Ferreira, 2012).

Ahora, asuma que,  $X, Y$  y  $(X, Y)$  tienen distribuciones  $F, G$  y  $K$ , respectivamente, donde,  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$K(x, y) = 0 \vee [F(x) + G(y) - 1] = \max\{0, F(x) + G(y) - 1\}.$$

El próximo resultado (Teorema 16) facilita la evaluación de  $W_r(F, G)$ , pues en este caso  $W_r(F, G)$ , con  $0 < r < 1$ , tienen una expresión cerrada en función de  $r$ -ésimo momento de  $|X - Y|$  con respecto  $K$ .

**Teorema 16.** Para  $0 < r < 1$  la distancia de Wasserstein del Lema 10 puede ser escrita como

$$\begin{aligned} W_r^r(F, G) &= \mathbb{E}|F^{-1}(U) - G^{-1}(1 - U)|^r \\ &= \int_0^1 |F^{-1}(u) - G^{-1}(1 - u)|^r du \\ &= \mathbb{E}_K |X - Y|^r = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r dK(x, y), \end{aligned}$$

donde  $U$  es uniformemente distribuida sobre el intervalo  $(0,1)$ .

**Ejemplo 17.** Sean  $X, Y, (X, Y)$  y  $(X^*, Y^*)$  las variables aleatorias consideradas en el Ejemplo 14. Una vez que, para cualquier  $r \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}|X^* - Y^*|^r - \mathbb{E}|X - Y|^r = \frac{2^{r+1} - 3^r - 1}{4} < 0,$$

concluimos que, para  $r \geq 1$ , no es posible obtener una representación de la distancia de Wasserstein como la del Teorema 16.

**Definición 18** (Convergencia). Sean  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $F$  funciones de distribución. Diremos que  $F_n$  converge en distancia de Wasserstein a  $F$ , si

$$W_r(F_n, F) \xrightarrow{n} 0$$

El siguiente lema básicamente nos brinda una conexión directa entre la convergencia en distancia de Wasserstein  $W_r$  y la convergencia en distribución. Para ello es necesario recordar la definición del conjunto  $\mathcal{P}_r$  en (3).

**Teorema 19** (Bickel & Freedman, 1981). Si  $r \geq 1$ ,  $F_n \in \mathcal{P}_r, n = 1, 2, \dots$  y  $F \in \mathcal{P}_r$ , entonces  $W_r(F_n, F) \xrightarrow{n} 0$  si y solamente si,

- $F_n \xrightarrow{d} F$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF(x).$

En otras palabras, el Teorema de Bickel y Freedman arma que convergencia en distancia de Wasserstein es un concepto más fuerte que convergencia en distribución. Para variaciones y extensiones de este resultado, consulte las referencias (Dorea & Ferreira, 2012; Shorack & Wellner, 2009).

**Definición 20.** Un proceso aleatorio  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$  es estacionario (fuerte) si para todo  $m \geq 1$  y  $l \in \mathbb{Z}$ ,

$$(X_{i_1}, \dots, X_{i_m}) \stackrel{d}{=} (X_{i_1+l}, \dots, X_{i_m+l}), \quad \forall i_1, \dots, i_m \in \mathbb{Z},$$

Donde " $\stackrel{d}{=}$ " denota igualdad en distribución.

La demostración del siguiente resultado puede ser encontrado en detalle en el Apéndice B de este trabajo.

**Proposición 21.** Sea  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$  un proceso aleatorio estacionario. Para  $m_j \geq 1$ , si  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones medibles, entonces  $\{f_j(X_{i_1}, \dots, X_{i_{m_j}}) : i_1, \dots, i_{m_j} \in \mathbb{Z}\}$  también es estacionario.

**Teorema 22** (Newman, 1980). Sea  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$  un proceso aleatorio estacionario y asociado positivo. Supongamos que la varianza es finita y estrictamente positiva,  $0 < \text{var}X_0 < +\infty$ , y que

$$\sigma^2 \equiv \text{var}(X_0) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{cov}(X_i, X_0) < +\infty$$

Entonces,

$$\frac{S_{[k, k+n]} - n\mathbb{E}(X_0)}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

**Proposición 23.** Convergencia de una serie monótona (Yeh, 2006). Si para todos los números naturales  $j$  y  $k$ ,  $a_{j,k}$  es un número real no negativo y  $a_{j,k} \leq a_{j+1,k}$ , entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_k a_{j,k} = \sum_k \lim_{j \rightarrow \infty} a_{j,k}.$$

### 3. TEOREMAS DEL LÍMITE CENTRAL

Sea  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$  un proceso aleatorio estacionario en el sentido de la Definición 20. Para procesos estocásticos es natural, cuando lidiamos con teoremas límites, considerar bloques de  $n$  variables aleatorias consecutivas,

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad y \quad S_{[k,k+n)} = \sum_{j=k}^{k+n-1} X_j.$$

Claramente, bajo el supuesto de estacionariedad tenemos  $S_{[k,k+n)} \stackrel{d}{=} S_n$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , esto es,  $S_{[k,k+n)}$  y  $S_n$  tienen la misma función de distribución. Para verificar esto basta considerar la función (medible)  $f_j(x_1; \dots; x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  en la Proposición 21.

Cabe mencionar que la asociatividad positiva y la estacionariedad aseguran que,  $\sigma^2$  en (6) pueda ser escrita como

$$\sigma^2 = \mathcal{X} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} cov(X_k, X_j)$$

y que este a bien definida. En Mecánica Estadística  $\mathcal{X}$  es conocida como la susceptibilidad correspondiente al proceso aleatorio  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$ .

Defina la variable aleatoria

$$V_{[k,k+n)} \equiv \frac{S_{[k,k+n)} - nE(X_0)}{\sqrt{n}\sigma} \quad (5)$$

con su respectiva función de distribución (acumulativa), dada por

$$F_{[k,k+n)}(x) \equiv \mathbb{P}(V_{[k,k+n)} \leq x), \quad x \in \mathbb{R},$$

lo cual por simplicidad denotamos como  $V_{[k,k+n)} \stackrel{d}{=} F_{[k,k+n)}$ .

El primer resultado (Teorema 24), extraído de la referencia (Cioletti et al., 2017), se desprende del Teorema del límite central (TLC) de Newman (Teorema 22).

**Teorema 24** (Cioletti et al., 2017). *Sea  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$  un proceso estacionario y asociado positivo. Supongamos que la varianza es finita y estrictamente positiva  $0 < var X_0 < +\infty$ , y que*

$$\sigma^2 = \text{var}(X_0) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{cov}(X_i, X_0) < +\infty. \quad (6)$$

Para  $0 < r \leq 2$ , tenemos

$$W_r(F_{[k,k+n]}, \Phi) \xrightarrow[n]{} 0,$$

donde  $\Phi$  denota la función de distribución de la distribución normal estándar  $N(0, 1)$ , la cual, para simplificar, usualmente escribiremos como  $\Phi \stackrel{d}{=} N(0, 1)$ .

Demostración. Sabemos que, por estacionariedad,  $S_{[k,k+n]} \stackrel{d}{=} S_n$ . Consecuentemente, ambas variables tienen los mismos momentos de orden finito, y por tanto, la misma varianza. Luego

$$\text{var}(S_{[k,k+n]}) = \text{cov} \left( \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j \right).$$

Usando la bilinealidad y la simetría de la covarianza, la expresión anterior puede ser escrita como

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= n \text{var}(X_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{cov}(X_0, X_{j-i}) \\ &= n \text{var}(X_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \text{cov}(X_0, X_j), \quad (7) \end{aligned}$$

donde en la cuarta igualdad, nuevamente, usamos la estacionalidad del proceso. Note que los elementos de la suma  $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \text{cov}(X_0, X_j)$  pueden ser reordenados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \text{cov}(X_i, X_j) &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \text{cov}(X_0, X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (n-i) \text{cov}(X_0, X_i). \end{aligned}$$

Usando este reordenamiento, (7) es

$$= n\text{var}(X_0) + 2 \sum_{i=1}^n (n-i) \text{cov}(X_0, X_i).$$

Luego, tenemos

$$\frac{\text{var}(S_{[k,k+n]})}{n} = \text{var}(X_0) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,n}, \quad (8)$$

donde  $a_{i,n}$  es definida por

$$a_{i,n} = \mathbb{1}_{\{n \geq i\}} \left( \frac{n-i}{n} \right) \text{cov}(X_0, X_i).$$

Vea que, por asociatividad,  $a_{i,n} \geq 0$ ,  $a_{i,n} \leq a_{i+1,n}$  y que  $a_{i,n} \rightarrow \text{cov}(X_0, X_i)$ . Luego, usando la Proposición 23 sobre convergencia de series monótonas, sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,n} = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{i,n} = \sum_{i=1}^{\infty} \text{cov}(X_0, X_i).$$

Sustituyendo el límite anterior en (8), de (6) se deduce que

$$\frac{\text{var}(S_{[k,k+n]})}{n} \rightarrow \sigma^2.$$

De este modo,

$$(9) \quad \mathbb{E}(V_{[k,k+n]}^2) = \mathbb{E} \left( \frac{S_{[k,k+n]} - n\mathbb{E}(X_0)}{\sqrt{n}\sigma} \right)^2 \rightarrow 1 = \mathbb{E}(Z^2),$$

donde  $Z \stackrel{d}{=} \Phi$ . Como  $\mathbb{E}(V_{[k,k+n]}^2)$  es convergente,  $\mathbb{E}(V_{[k,k+n]}^2)$  es acotada, y claramente  $V_{[k,k+n]} \in \mathcal{P}_2$ . Dado que se cumple la convergencia en distribución (4), Teorema de Newman (1980), concluimos del Teorema 19 de Bickel y Freedman que  $W_2(V_{[k,k+n]}, \Phi) \rightarrow 0$ .

A continuación, para extender la convergencia para  $0 < r < 2$  hacemos uso del Teorema de representación 13 de Dorea y Ferreira. Existe una variable aleatoria  $Z^* \stackrel{d}{=} \Phi$  tal que la distribución conjunta de  $(V_{[k,k+n]}, Z^*)$  está dada por  $H(x, y) = F_{[k,k+n]}(x) \wedge \Phi(y)$  y  $\mathbb{E}(V_{[k,k+n]} - Z^*)^2 = W_2^2(F_{[k,k+n]}, \Phi) \rightarrow 0$ . (10)

Usando el Lema 10 y la Desigualdad de Lyapunov tenemos, para  $0 < r \leq 2$ ,

$$\begin{aligned} W_r^r(F_{[k,k+n]}, \Phi) &= \inf_{(V_{[k,k+n]}, Z^*)} \mathbb{E}|V_{[k,k+n]} - Z^*|^r \\ &\leq \mathbb{E}|V_{[k,k+n]} - Z^*|^r \leq \mathbb{E}(V_{[k,k+n]} - Z^*)^2 \xrightarrow{n} 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la convergencia en (10).

Para derivar la convergencia de orden superior para  $W_r$ , se requerirán condiciones de momento adicionales en  $X_j$ . Para  $k \in \mathbb{Z}$ , sea  $u_k(\cdot)$  el coeficiente de Cox-Grimmet, definido por

$$u_k(n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}: |k-j| \geq n} \text{cov}(X_k, X_j), \quad n \geq 0.$$

Tenga en cuenta que, según el Lema 12, el proceso aleatorio  $\{X_j - \mathbb{E}(X_j): j \in \mathbb{Z}\}$  también es estacionario y está asociado positivamente. Esto nos permite plantear una desigualdad de momentos de Birkel (1988) adaptada a nuestras necesidades.

**Lema 25** (Cioletti et al., 2017). Sean  $2 < r < r^*$  y  $\{X_j: j \in \mathbb{Z}\}$  un proceso estacionario y asociado positivo. Supongamos que  $\mathbb{E}|X_0|^{r^*} < +\infty$  y que para algunas constantes  $C_1 > 0$  y

$$\theta \geq \frac{r^*(r-2)}{2(r^*-r)}$$

tenemos  $u(n) \leq C_1 n^{-\theta}$ . Entonces existe una constante  $C_2 = C_2(r, r^*) > 0$  tal que

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}|S_{[k,k+n]} - n\mathbb{E}(X_1)|^r \leq C_2 n^{\frac{r}{2}}. \quad (11)$$

*Demostración.* La prueba se desprende inmediatamente del Corolario 2.21 en Oliveira (2012).

Note que, según el Teorema 24, tenemos satisfechas las condiciones del Lema 25 para  $r = 2$ . De hecho, por (6) tenemos  $u(n) \leq C_1$  y (11) sigue de (9).

El siguiente teorema, extraído de la referencia (Cioletti et al., 2017), nos brinda una extensión de la convergencia en distancia de Wasserstein para ordenar  $r$  mayores que 2.

**Teorema 26** (Cioletti et al., 2017). Sean  $2 < r < r^*$  y  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$  un proceso estacionario y asociado positivo. Supongamos que  $\mathbb{E}|X_0|^{r^*} < +\infty$  y que para algunas constantes  $C_1 > 0$  y

$$\theta \geq \frac{r^*(r-2)}{2(r^*-r)}$$

se satisface  $u(n) \leq C_1 n^{-\theta}$ . Entonces, si  $\sigma^2$ , dada por (6), es tal que  $0 < \sigma^2 < +\infty$ , tenemos

$$W_r(F_{[k,k+n]}, \Phi) \xrightarrow[n]{} 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}|V_{[k,k+n]}|^r \xrightarrow[n]{} \mathbb{E}|Z|^r,$$

donde  $V_{[k,k+n]} \stackrel{d}{=} F_{[k,k+n]}$  y  $V_{[k,k+n]}$  se define mediante (5); y  $Z \stackrel{d}{=} \Phi \stackrel{d}{=} N(0,1)$ .

*Demostración.* Tenga en cuenta que para  $r < 2$ , el Teorema de Newman (Teorema 22) implica  $V_{[k,k+n]} \xrightarrow{d} Z$ . Luego, para completar la prueba del teorema, necesitamos demostrar que

$$V_{[k,k+n]} \in \mathcal{P}_r \quad \text{y} \quad \mathbb{E}|V_{[k,k+n]}|^r \xrightarrow[n]{} \mathbb{E}|Z|^r, \quad Z \stackrel{d}{=} \Phi \quad (12)$$

En este caso la convergencia  $W_r(F_{[k,k+n]}, \Phi) \xrightarrow[n]{} 0$  sigue inmediatamente por aplicar el Teorema de Bickel y Freedman (Teorema 19).

Si demostramos que la secuencia  $\{|V_{[k,k+n]}|^r\}_{n \geq 1}$  es uniformemente integrable, entonces, por usar resultados estándar en la literatura, tendríamos la validez de la convergencia  $\mathbb{E}|V_{[k,k+n]}|^r \xrightarrow[n]{} \mathbb{E}|Z|^r$  en (12).

Para demostrar que  $\{|V_{[k,k+n]}|^r\}_{n \geq 1}$  es uniformemente integrable, basta probar la siguiente integración uniforme: para algún  $r < r' < r^*$ ,

$$K \equiv \sup_{n \geq 1} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}|V_{[k,k+n]}|^{r'+\epsilon} < \infty,$$

lo cual implicaría que  $V_{[k,k+n]} \in \mathcal{P}_{r'} \subset \mathcal{P}_r$ . De hecho, usando la Desigualdad de Lyapunov tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\{|V_{[k,k+n]}|^r \geq \ell\}} |V_{[k,k+n]}|^r(\omega) d\mathbb{P}(\omega) &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{|V_{[k,k+n]}|^r \geq \ell\}} |V_{[k,k+n]}|^r \right] \\ &\leq \frac{1}{\ell^{\frac{1}{r}}} \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{|V_{[k,k+n]}| \geq \ell^{\frac{1}{r}}\}} |V_{[k,k+n]}|^{r'} \right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{K}{\ell^r}.$$

Bajo la condición  $K < \infty$ , al tomar  $\sup_{n \geq 1}$  y luego  $\lim_{\ell \rightarrow \infty}$  en la desigualdad anterior, la integrabilidad uniforme de  $\left\{ |V_{[k, k+n]}|^r \right\}_{n \geq 1}$  sigue inmediatamente.

Sea  $\psi(r) = \frac{r^*(r-2)}{[2(r^*-r)]}$ . Se deduce que existen  $r^* > r' > r$  tales que  $\theta > \psi(r')$ .

Simplemente tome  $r' = \frac{2r^*(1+\theta)}{2\theta+r^*}$ . Además,  $\psi(r') \geq \psi(r)$ , pues  $\psi$  es creciente. Del Lema 25 tenemos, para  $C_2 = C_2(r', r^*) > 0$ ,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} |S_{[k, k+n]} - n\mathbb{E}(X_1)|^{r'} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} |V_{[k, k+n]} \sqrt{n}\sigma|^{r'} \leq C_2 n^{\frac{r'}{2}}.$$

Resulta que,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} |V_{[k, k+n]}|^{r'} \leq C_2 \frac{n^{\frac{r'}{2}}}{(\sqrt{n}\sigma)^{r'}} = \frac{C_2}{\sigma^{r'}} < +\infty, \quad \forall n \geq 1.$$

Esto concluye la prueba del teorema.

Como aplicación de los Teoremas 24, 26 y el Lema 28 (vea Apéndice C), tenemos el siguiente resultado de convergencia:

**Corolario 27.** *Si el proceso aleatorio  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$  satisface las hipótesis del Teorema 24 (o Teorema 26), entonces*

$$d_K(F_{[k, k+n]}, \Phi) \xrightarrow{n} 0,$$

donde  $d_K(F, G) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)|$  es la distancia de Kolmogorov entre  $F$  y  $G$ .

## AGRADECIMIENTO

RV agradece la invitación de los organizadores del evento "I Congreso Internacional de Investigación de Ingeniería Económica, Estadística y Ciencias Sociales".

## APÉNDICE A. DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 10

La prueba de este resultado requiere el uso del Teorema de cambio de variables.

Nuestro objetivo principal es demostrar que

$$W_r^r(F, G) \leq \inf_{(X,Y)} \mathbb{E}|X - Y|^r \quad (13)$$

y que

$$W_r^r(F, G) \geq \inf_{(X,Y)} \mathbb{E}|X - Y|^r \quad (14)$$

Primero, demostraremos la desigualdad en (13). Para ello, considere un vector aleatorio  $Z = (X, Y)$ , definido sobre algún espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , cuyas distribuciones marginales de  $X$  e  $Y$  son dadas por  $F$  y  $G$ , respectivamente. Si  $\tilde{H}$  denota la distribución conjunta de  $\mathbf{Z}$ , entonces las distribuciones marginales de  $\tilde{H}$  son dadas por:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{H}(x, y) &= \mathbb{P}(X \in (-\infty, x], Y \in \mathbb{R}) = F(x), & (15) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{H}(x, y) &= \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}, Y \in (-\infty, y]) = G(y). \end{aligned}$$

Considere la función Borel medible  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = |x - y|^r$ . Usando la definición de esperanza y aplicando el Teorema de cambio de variables, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X - Y|^r &= \int_{\Omega} g(X(\omega), Y(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) d(\mathbb{P} \circ Z^{-1})(x, y). \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\pi = \mathbb{P} \circ Z^{-1} \in \Pi(F, G)$ . De hecho, esto es inmediato, pues

$$\begin{aligned} \pi((-\infty, x] \times \mathbb{R}) &= \mathbb{P} \circ Z^{-1}((-\infty, x] \times \mathbb{R}) \\ &= \mathbb{P}(X \in (-\infty, x], Y \in \mathbb{R}) = F(x), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos (15). De forma similar, tenemos

$$\pi(\mathbb{R} \times (-\infty, y]) = G(y),$$

lo cual prueba la afirmación.

Los argumentos anteriores muestran que, para cada vector aleatorio  $(X, Y)$  cuyas distribuciones marginales están dadas por  $F$  y  $G$ , existe una medida de probabilidad  $\pi \in \Pi(F, G)$ , tal que

$$\mathbb{E}|X - Y|^r = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r d\pi(x, y) \geq W_r^r(F, G).$$

Como consecuencia de esta igualdad y de la definición del ínfimo, obtenemos

$$W_r^r(F, G) \leq \inf_{(X, Y)} \mathbb{E}|X - Y|^r.$$

Esto es, la desigualdad en (13) es satisfecha.

Ahora demostraremos la desigualdad recíproca en (14). De hecho, dado  $\pi \in \Pi(F, G)$ , considere el espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2), \pi)$  y las variables aleatorias (proyecciones)  $\pi_1$  y  $\pi_2$  definidas por  $\pi_1(x, y) = x$  y  $\pi_2(x, y) = y$ , respectivamente. Desde que  $\pi \in \Pi(F, G)$ , las distribuciones marginales del vector  $(\pi_1, \pi_2)$  son  $F$  y  $G$ , respectivamente. Usando la definición de las variables  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , tenemos

$$\mathbb{E}|\pi_1 - \pi_2|^r = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r d\pi(x, y).$$

Así, para cada  $\pi \in \Pi(F, G)$ , se construyó un vector aleatorio  $(\pi_1, \pi_2)$  que tiene como distribuciones marginales a  $F$  y  $G$ , respectivamente, de modo que se cumple la igualdad anterior. Por lo tanto, hemos demostrado que

$$\inf_{(X, Y)} \mathbb{E}|X - Y|^r \leq \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^r d\pi(x, y), \quad \pi \in \Pi(F, G).$$

Por lo tanto,

$$\inf_{(X, Y)} \mathbb{E}|X - Y|^r \leq W_r^r(F, G).$$

Esto es, la desigualdad en (14) es válida.

De (13) y (14) la prueba del lema sigue inmediatamente.

## APÉNDICE B. DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 21

Debemos verificar que,  $\forall m_j > 1, k \in \mathbb{Z}$ ,

$$f_j(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{m_j}}) \stackrel{d}{=} f_j(X_{i_1+k}, X_{i_2+k}, \dots, X_{i_{m_j}+k}),$$

De hecho, por cada  $x \in \mathbb{R}$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(f_i(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{m_j}}) \leq x\right) \\ = \mathbb{P}\left((X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{m_j}}) \in f_j^{-1}((-\infty, x])\right), \quad (16) \end{aligned}$$

donde  $f_j^{-1}(\cdot)$  es la imagen de  $f_j$  y  $f_j^{-1}((-\infty, x])$  es un boreliano de  $\mathbb{R}^n$ . Una vez que  $\{X_j : j \in \mathbb{Z}\}$  es estacionario, vea que,  $\forall m_j > 1, k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{m_j}}\right) \in f_j^{-1}((-\infty, x])\right) \\ = \mathbb{P}\left(\left(X_{i_1+k}, X_{i_2+k}, \dots, X_{i_{m_j}+k}\right) \in f_j^{-1}((-\infty, x])\right). \end{aligned} \quad (17)$$

De (16) y (17) obtenemos,  $\forall m_j > 1, k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(f_i\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{m_j}}\right) \leq x\right) \\ = \mathbb{P}\left(\left(X_{i_1+k}, X_{i_2+k}, \dots, X_{i_{m_j}+k}\right) \in f_j^{-1}((-\infty, x])\right) \\ = \mathbb{P}\left(f_j\left(X_{i_1+k}, X_{i_2+k}, \dots, X_{i_{m_j}+k}\right) \leq x\right). \end{aligned}$$

En otras palabras,  $\forall m_j \geq 1$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , las variables aleatorias  $f_j\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{m_j}}\right)$  y  $f_j\left(X_{i_1+k}, X_{i_2+k}, \dots, X_{i_{m_j}+k}\right)$  son iguales en distribución. Esto concluye la demostración.

## APÉNDICE C. UN RESULTADO ADICIONAL

**Lema 28.** Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias tal que  $Y$  es absolutamente continua con densidad  $f_Y$  tal que  $|f_Y(y)| \leq C$ ,  $\forall y \in \text{Supp}(Y)$  y para alguna constante  $C > 0$ . Entonces,

$$d_K(F_X, F_Y) \leq 2\sqrt{CW_1(F_X, F_Y)},$$

donde  $d_K(F_X, F_Y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_X(x) - F_Y(x)|$  es la distancia de Kolmogorov entre las distribuciones  $F_X$  y  $F_Y$ .

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$  y  $t \in \mathbb{R}$  fijo, definimos

$$\begin{aligned} g_t(x) &\equiv \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(x) + \left[1 - \frac{1}{\varepsilon}(x - t)\right] \mathbb{1}_{(t, t+\varepsilon)}(x), \\ h_t(x) &\equiv g_{t-\varepsilon}(x). \end{aligned}$$

Para cada  $x, y \in \mathbb{R}$  note que

$$\begin{aligned} g_t(x) - g_t(y) &= \frac{1}{\varepsilon}(y - x) \mathbb{1}_{(t, \infty)}(x) \mathbb{1}_{(-\infty, t+\varepsilon)}(y), \\ h_t(x) - h_t(y) &= \frac{1}{\varepsilon}(y - x) \mathbb{1}_{(t-\varepsilon, \infty)}(x) \mathbb{1}_{(-\infty, t)}(y), \end{aligned}$$

lo cual implica que  $g_t$  y  $h_t$  son funciones Lipschitz con constante Lipschitz  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Dado que

$$\mathbb{E}[g_t(X)] \geq F_X(t), \quad \mathbb{E}[h_t(Y)] \leq F_Y(t) + C_\varepsilon,$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} F_X(t) - F_Y(t) &\leq \mathbb{E}[g_t(X) - g_t(Y)] + \{\mathbb{E}[g_t(Y)] - F_Y(t)\} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}|X - Y| + C_\varepsilon, \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que  $g_t$  es Lipschitz. Por la desigualdad anterior y de la definición de la distancia de Wasserstein se deduce que

$$F_X(t) - F_Y(t) \leq \frac{1}{\varepsilon} W_1(F_X, F_Y) + C_\varepsilon.$$

De forma análoga, usando que  $h_t$  es Lipschitz, encontramos que

$$F_Y(t) - F_X(t) \leq \frac{1}{\varepsilon} W_1(F_X, F_Y) + C_\varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$|F_X(t) - F_Y(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon} W_1(F_X, F_Y) + C_\varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Una vez que la función  $\varepsilon \rightarrow \frac{W_1(F_X, F_Y)}{\varepsilon} + C_\varepsilon$  tiene un valor máximo  $2\sqrt{CW_1(F_X, F_Y)}$  en  $\varepsilon = \varepsilon = \sqrt{W_1(F_X, F_Y)/C}$ , la demostración del corolario sigue rápidamente.

#### 4. REFERENCIAS

- Ambrosio, L. (2003). Lecture Notes on Optimal Transport Problems. In: Ambrosio, L., Deckelnick, K., Dziuk, G., Mimura, M., Solonnikov, V. A., Soner, H. M., & Ambrosio, L. (Eds.), *Mathematical Aspects of Evolving Interfaces* (pp. 1-52). Springer Berlin Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-39189-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-39189-0_1)
- Barlow, R. E., & Proschan, F. (1975). *Statistical theory of reliability and life testing: probability models*. Holt, Rinehart and Winston. <https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA006399>
- Bickel, P. J., & Freedman, D. A. (1981). Some asymptotic theory for the bootstrap. *The annals of statistics*, 9(6), 1196-1217. <https://doi.org/10.1214/aos/1176345637>
- Birkel, T. (1988). Moment bounds for associated sequences. *The annals of Probability*, 16(3), 1184-1193. <https://www.jstor.org/stable/2244116>
- Cioletti, L., Dorea, C. C. Y., & Vila, R. (2017). *Limit Theorems in Mallows Distance for Processes with Gibbsian Dependence*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.03747>
- Dorea, C. C., & Ferreira, D. B. (2012). Conditions for equivalence between Mallows distance and convergence to stable laws. *Acta Mathematica Hungarica*, 134(1-2), 1-11. <https://doi.org/10.1007/s10474-011-0101-7>
- Esary, J. D., Proschan, F., & Walkup, D. W. (1967). Association of random variables, with applications. *The Annals of Mathematical Statistics*, 38(5), 1466-1474. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177698701>
- Gabriel, R. V. (2017). Representações gráficas para sistemas de spins com presença de campo externo: algumas relações em teoria de probabilidades [Tese para obtenção do grau de Doutor em Matemática]. Universidade de Brasília. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. <http://icts.unb.br/jspui/handle/10482/22471>
- Gray, R. M. (2009). *Probability, random processes, and ergodic properties*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1090-5>
- Jordan, R., Kinderlehrer, D., & Otto, F. (1998). The variational formulation of the Fokker-Planck equation. *SIAM journal on mathematical analysis*, 29(1), 1-17. <https://doi.org/10.1137/S0036141096303359>
- Kantorovič, L. V., Rubinsĭteĭn, G. S'. (1958). On a space of completely additive functions. *Vestnik Leningrad University*, 13, 52-59.

- Mallows, C. L. (1972). A note on asymptotic joint normality. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43(2), 508-515. <https://www.jstor.org/stable/2239988>
- Newman, C. M. (1980). Normal fluctuations and the FKG inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 74(2), 119-128. <https://doi.org/10.1007/BF01197754>
- Newman, C. M., & Wright, A. L. (1981). An invariance principle for certain dependent sequences. *The Annals of Probability*, 9(4), 671-675. <https://doi.org/10.1214/aop/1176994374>
- Oliveira, P. E. (2012). *Asymptotics for associated random variables*. Springer Science & Business Media.
- Otto, F. (2001). The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 26(1-2), 101-174. <https://doi.org/10.1081/PDE-100002243>
- Pitt, L. D. (1982). Positively correlated normal variables are associated. *The Annals of Probability*, 10(2), 496-499. <https://www.jstor.org/stable/2243445>
- Rachev, S. T., & Rüschendorf, L. (1998). *Mass Transportation Problems: Volume I: Theory*. Springer Science & Business Media.
- Shorack, G. R., & Wellner, J. A. (2009). *Empirical processes with applications to statistics*. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9780898719017.bm>
- Sommerfeld, M., & Munk, A. (2018). Inference for empirical Wasserstein distances on finite spaces. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 80(1), 219-238. <https://doi.org/10.1111/rssb.12236>
- Vaserstein, L. N. (1969). Markov processes over denumerable products of spaces, describing large systems of automata. *Problemy Peredachi Informatsii*, 5(3), 64-72. <https://www.mathnet.ru/eng/ppi1811>
- Villani, C. (2003). Topics in optimal transportation. *OR/MS Today*, 30(3), 66-67. <https://link.gale.com/apps/doc/A104669453/AONE?u=anon~6226aa1c&sid=googleScholar&xid=2585334e>
- Villani, C. (2009). *Optimal transport: old and new*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71050-9>
- Yeh, J. (2006). *Real Analysis: Theory of Measure and Integration*. World Scientific.

## Análisis espacial de la asociatividad socioeducativa con el atraso y la deserción escolar en educación primaria regular por departamentos, Perú 2016 a 2021

### Spatial analysis of the socio-educational association with delay and school dropout in regular primary education by department, Perú 2016 to 2021

Magen Danielle Infante Rojas<sup>1</sup>, Augusto Mayorca Tinoco<sup>2</sup>, Wilmer Wilson Aspajo Quiñonez<sup>3</sup>, Miliani Stephany Quispe Bejar<sup>4</sup>, Ruth Samanta Huamani Llactahuaman<sup>5</sup>, Christopher Norman Malaga Espinoza<sup>6</sup>

#### RESUMEN

La Educación Básica en el Perú, es un factor fundamental para el desarrollo del país. Los indicadores de la Educación Primaria publicadas por el Instituto de Estadística e Informática (INEI) revelan la necesidad de mayor investigación. Si bien, existen variados estudios referentes a la investigación, éstas no han sido lo suficiente exhaustivas como esperado. Para cada nivel de la educación básica, las realidades son diferentes, uno de esos niveles es la educación primaria, a la cual acceden la mayoría de peruanos. El objetivo es establecer la asociación socio-educativa espacial del atraso y la deserción escolar. Se construyó un marco de datos, denominado dataframe con las Estadísticas de Calidad Educativa (ESCALE por sus siglas) del Ministerio de Educación (MINEDU por sus siglas) del Perú. Además de un análisis descriptivo espacial, se verificó autocorrelación espacial a nivel Departamental del atraso y la deserción escolar, más aún, que los factores desnutrición crónica infantil, niños y adolescentes que trabajan y alumnos con madres con educación superior completa están espacialmente asociados con el atraso y la deserción escolar. Esa asociación, se confirmó a través del modelo de Regresión Espacial Ponderado.

**Palabras claves:** autocorrelación espacial socio-educativa; atraso escolar primaria, deserción interanual escolar primaria; Índice de Morán Univariado; Índice de Morán Bivariado; Agrupamiento por Geary.

Recibido: 04/11/2023  
Aceptado: 14/12/2023  
Publicado: 31/12/2023

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú  
Correspondencia: [irdanielle@uni.edu.pe](mailto:irdanielle@uni.edu.pe)  
<https://orcid.org/0000-0002-9292-7457>

<sup>2</sup> Universidad Cesar Vallejo, Lima, Perú  
Correspondencia: [amayorcat@ucvvirtual.edu.pe](mailto:amayorcat@ucvvirtual.edu.pe)  
<https://orcid.org/0000-0002-2444-471X>

<sup>3</sup> Estudiante - FIEECS - Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú  
Correspondencia: [waspajoq@uni.pe](mailto:waspajoq@uni.pe)  
<https://orcid.org/0009-0004-8318-3523>

<sup>4</sup> Estudiante - FIEECS - Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú  
Correspondencia: [miliana.quispe.b@uni.pe](mailto:miliana.quispe.b@uni.pe)  
<https://orcid.org/0009-0009-3611-4206>

<sup>5</sup> Estudiante - FIEECS - Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú  
Correspondencia: [rhuamanill@uni.pe](mailto:rhuamanill@uni.pe)  
<https://orcid.org/0009-0002-5417-1537>

<sup>6</sup> Estudiante - FIEECS - Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú  
Correspondencia: [cmalagac@uni.pe](mailto:cmalagac@uni.pe)  
<https://orcid.org/0009-0005-4865-1026>

Licencia:



Revista de la Facultad de Ingeniería Económica, Ingeniería Estadística y Ciencias Sociales de la Universidad Nacional de Ingeniería

## ABSTRACT

Basic Education in Peru is key factor for the development of the country. The Primary Education indicators published by the Institute of Statistics and Informatics (INEI) reveals the need for further research. Although there are various studies regarding primary education, they have not been as exhaustive as expected. For each level of basic education, the real-life situations are different, one of these levels is primary education, which the majority of Peruvians access. The objective is to establish the spatial socio-educational association of backwardness and school dropout. A data frame, called dataframe, was built with the Educational Quality Statistics (ESCALE) of the Ministry of Education (MINEDU) of Peru. In addition to spatial descriptive analysis, spatial auto-correlation at the Departmental level of backwardness and school dropout was verified, moreover, the factors chronic childhood malnutrition, children and adolescents who work and students with mothers with completed higher education are spatially associated with the backwardness and school dropout. This association was confirmed through the Weighted Spatial Regression model.

**Keywords:** *Socio-educational spatial auto-correlation; primary school backwardness, primary school inter-annual dropout; Univariate Moran Index; Bivariate Moran Index; Geary Clustering.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Es posible que recientes sucesos hayan alterado los indicadores de acceso y permanencia de la educación primaria en el Perú. Dos sucesos, por ejemplo, el impacto del periodo de pandemia hacia el periodo post pandemia, y otro, de carácter normativo, la disposición del MINEDU para que ningún estudiante repuebe el año desde el 2020 (Resolución Viceministerial N° 193-2020-MINEDU, p. 10), entre otros.

Según el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI por sus siglas), al 2021, 4.4% de la población de 25 años a más, no logró estudiar ningún nivel de educación y el 24.8% alcanzó el nivel educativo primaria o una parte (INEI, 2022a, p. 113) lo que implica que dejó de estudiar en primaria, lo que se describe en la Tabla 1. Esto significa que un cuarto de la población no tuvo hasta el año 2021 educación básica completa, lo que resulta preocupante pues en el nivel primaria, se consolida las bases de la competencia comunicativa y matemática para el resto de la educación básica regular y superior.

Específicamente, relacionado a la permanencia escolar, los fenómenos atraso y deserción escolar, son motivo de interrogación. Gráficamente, la Figura 1, mues-

tra la evolución de los indicadores de acceso 2016 a 2021. La proporción de matriculados de acuerdo con el nivel socioeconómico, el género y el área de residencia, indica en general que la matrícula desde el 2016 fue en aumento en todo el país hasta el año 2019, para el 2020 el índice de matriculados disminuyó abruptamente, manteniéndose bajo hasta el año 2021, lo cual podría haber sido ocasionado en parte por atraso en la matrícula o por la deserción.

Otra razón de la disminución de matriculados podría tener su explicación en la incursión de la pandemia. Al comparar el nivel de matriculados entre niños y niñas se encuentra que del año 2017 para el 2018 hay un gran aumento para ambos géneros, pero esta subida es más pronunciada para las niñas. Sin embargo, desde el 2019 la caída es súbita y para ambos géneros en la misma proporción. Si comparamos los sectores más acomodados con los de menores recursos se puede observar que los de mayores recursos tienden a matricularse menos desde el 2020 y que siguen disminuyendo paulatinamente, sin embargo, las zonas más pobres se están recuperando en su nivel de matrículas.

**Tabla 1.**

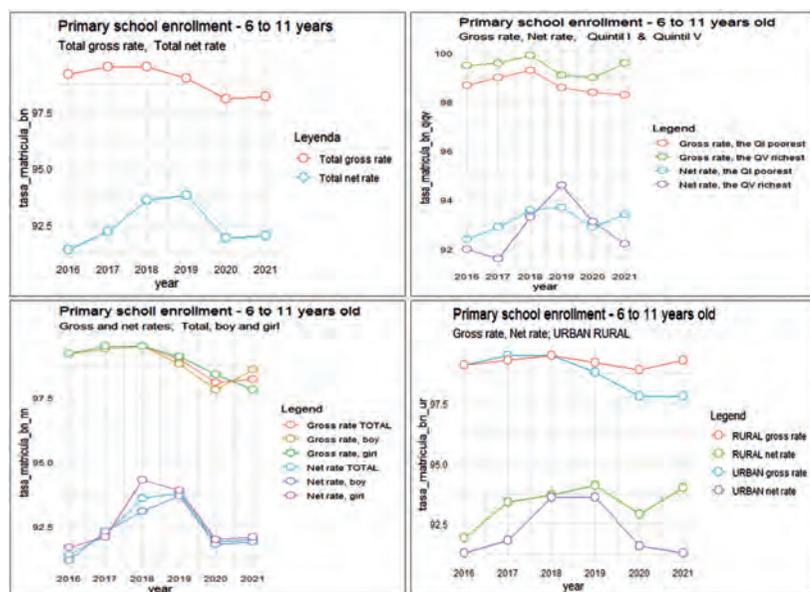
*Población de 25 años a más que alcanzaron algún nivel educativo.*

Nivel alcanzado	Año / Porcentaje					
	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Sin nivel o inicial	5.5	5.2	4.9	4.8	4.3	4.4
Primaria	26.5	26.0	25.6	24.8	24.6	24.8
Otros	68	68.8	69.5	70.4	71.1	70.8
Total	100	100	100	100	100	100

En la Figura 1, también se aprecia que, al comparar el nivel de matrícula entre estudiantes de zona rural y zona urbana, se observa que hubo un crecimiento sostenido hasta el 2019, de la zona rural. La zona urbana fue creciendo en su índice de matrícula solo hasta el 2018, al siguiente año se mantuvo con el mismo nivel de crecimiento.

Figura 1.

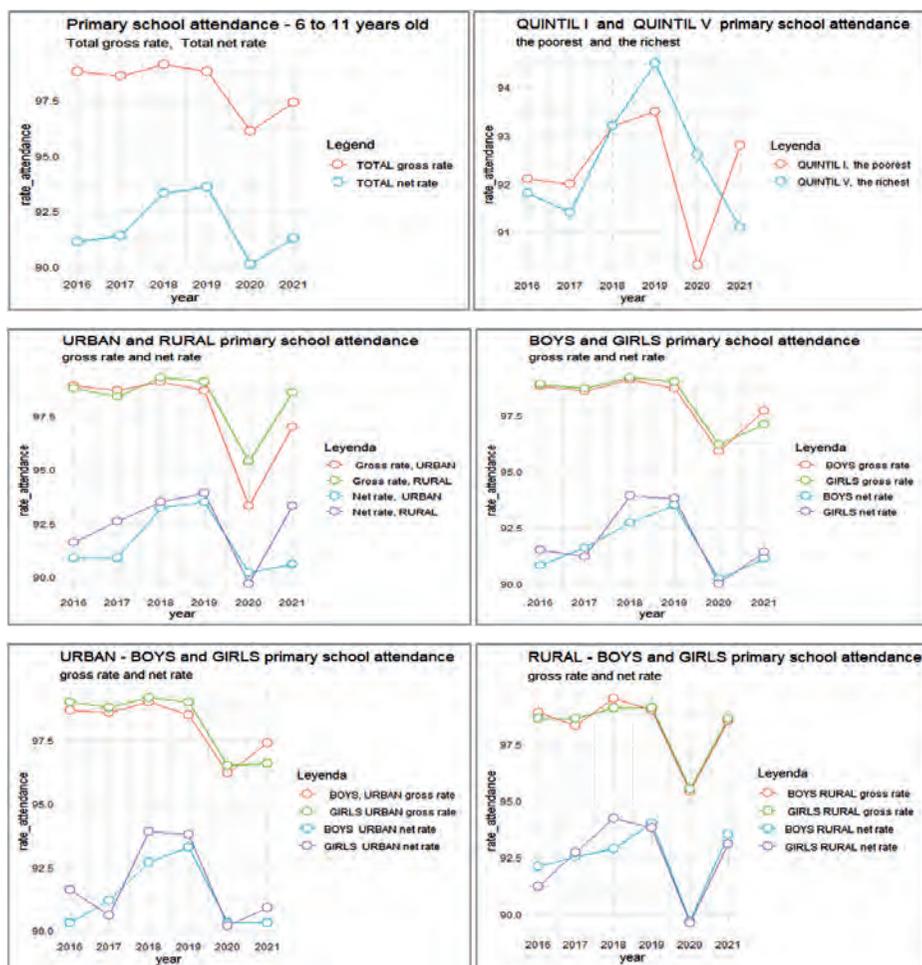
Matrícula a primaria según nivel socioeconómico, género, área de residencia



Para el 2020, época de pandemia, ambas zonas disminuyeron dramáticamente pero mucho más la zona urbana. La zona rural para el 2021 volvió a recuperar su ritmo de crecimiento, pero la zona urbana no solo no se recuperó, sino que siguió disminuyendo. Esto puede significar que, en las zonas rurales, los efectos de la pandemia no fueron muy significativos por la distancia entre pobladores y poblaciones, mientras que en la zona urbana hay mayor concentración de pobladores y, por ende, mayor nivel de infección. Sin embargo, cabe destacar que la tasa de matrícula hasta el año 2021 ha sufrido variaciones preocupantes sobre todo en el sector urbano, en la población con mayores recursos y en ambos géneros.

En la Figura 2, se observa en general que la asistencia se ha ido incrementando hasta el año 2019, para el 2020 decae enormemente y para el 2021 va recuperándose. Tanto el área rural como urbana iban aumentando su asistencia hasta el 2019 pero el 2020 decaen en la asistencia de manera similar; sin embargo, para el 2021 la zona rural se dispara logrando un incremento similar al que tuvieron en el 2019 mientras que la zona urbana para el 2021 si bien aumenta lo hace en poca medida.

**Figura 2.**  
Asistencia a primaria según status socioeconómico, área de residencia, género, región natural



En cuanto a la asistencia entre hombres y mujeres para el 2018 había mayor cantidad de mujeres, para el 2019 se igualan ambos géneros y para el 2020 ambos grupos disminuyen enormemente y en la misma proporción. Para el 2021 los hombres aumentan en su asistencia, pero las mujeres se mantienen igual. Estas cifras son una visualización a nivel nacional, queda explorar el impacto interdepartamental. A nivel país, indudablemente, en todos los gráficos, el año 2020 ha ocasionado un impacto en la tendencia de los indicadores de educación, particularmente en la educación primaria.

El acceso a la educación, representado en indicadores de ingreso a primaria, matrícula y asistencia estaría muy relacionado con los indicadores de permanencia, entre los que se encuentran atraso y deserción en primaria. Al respecto, las recientes modificaciones a los reglamentos en función de las políticas internacionales abordando educación inclusiva, postpandemia, entre otros (Decreto Supremo N.º 007-2021-MINEDU, p. 9, 10), la emergencia sanitaria en 2020 que habría impactado de forma distinta según la ubicación geográfica (Ministerio de Salud, 2023), produciendo así, cambios en el progreso de la educación, específicamente en primaria, motivan esta investigación. De acuerdo a lo mencionado, es de interés estudiar los años de los periodos pre y postpandemia, a nivel Departamental en el Perú, principalmente la asociación espacial con indicadores socioeducativos.

El impacto en los indicadores de permanencia, según la ubicación geográfica de los Departamentos del Perú es una oportunidad a investigar. Por ese motivo, se plantea el problema de investigación en ¿Cómo se comporta la asociación geográfica entre vecinos inter Departamentales del Perú en los indicadores (a) atraso escolar y (b) deserción interanual escolar a nivel primaria?, más aún, ¿Cómo demostrar que esa asociación espacial se puede explicar conjuntamente con indicadores sociales? En ese sentido, los objetivos son explorar, espacialmente, en el periodo 2016 a 2021, los indicadores (a) atraso escolar de primaria y la (b) deserción interanual escolar en primaria de los Departamentos del Perú; determinar la autocorrelación espacial, asimismo, asociar espacialmente (a) y (b) con los factores sociales (i) desnutrición crónica infantil, (ii) niños y adolescentes de 5 a 17 años que trabajan y (iii) madres con educación superior completa.

El atraso y la deserción escolar de primaria en el Perú, puede tener diversas causas como el tiempo de la familia (Beltrán, 2013); el trabajo infantil, por ejemplo, el 2015 se realizó una muestra que determinó una relación directa con la deserción predominante en el área rural y en residentes en la región sierra (Tovar Obregón & Ríos Cataño, 2017). En otro sentido, en el Perú, la deserción se ha relacionado con la formación ciudadana, democrática e intercultural de niñas (Camayo-Tolentino et al., 2022). En otras regiones, el origen social de la familia, el territorio y las condiciones de habitación, afectan entre otros aspectos en la ocurrencia de deserción escolar (Boniolo & Najmias, 2018); el impacto de la condición socioeconómica de los padres (Cardoso & Verner, 2007; Nishida et al., 2022). Estudios relacionados del atraso escolar y el estatus de pobreza en el hogar, no sería un importante factor de atraso escolar en hogares urbanos, no

obstante sí lo sería en zonas rurales (Seshie-Nasser & Oduro, 2016), lo que se asemeja a las Figura 1 y Figura 2, la diferencia de los indicadores de acceso según género no destaca en el Perú.

A nivel internacional, referido a estudios espaciales, a nivel condado, se ha estudiado la asociación espacial de ingresos de los condados de US y el porcentaje de estudiantes de secundaria matriculados en cursos de nivel avanzado con una mejor clasificación de calidad de vida y comportamiento sanitario (Walsemann et al., 2021). Socialmente, la diferenciación educativa y la diferencia de ingresos entre las zonas urbanas y rurales tienen un efecto agravante sobre la pobreza relativa rural en China por ejemplo (Tang, Li & He, 2023). El análisis espacial permite estudiar la desigualdad de género, el crecimiento económico y las tensiones religiosas entre otros factores sociales (Iqbal et al., 2022). La dinámica de migración que podría haber aumentado o disminuido y la atenuación demográfica natural (CEPAL, 2022, p. 14) sugieren investigar el factor socioeducativo considerando la ubicación geográfica o espacial.

## **2. METODOLOGÍA**

### **2.1 DATA, VARIABLES, ALCANCE Y SOFTWARE**

Múltiples indicadores educativos de 2011 a 2021 los publica el INEI (INEI, 2022), asimismo, se publican en el sitio web ESCALE (ESCALE, 2023a) que pertenece al MINEDU. Principalmente se han utilizado los datos de ESCALE. Las definiciones de lo que significa (a) atraso (alumnos con atraso escolar) de alumnos de primaria y (b) deserción interanual escolar, se encuentra definido en la web ESCALE del MINEDU. La Tabla 2 muestra las definiciones de esos dos indicadores de permanencia y la unidad de medida según el MINEDU.

Para el análisis socioeducativo, la data en ESCALE, sitio web perteneciente a la Unidad de Estadísticas Educativas del Ministerio de Educación (MINEDU), contiene información de acceso, permanencia, progreso, impacto y contexto de la Educación Básica. Dentro de los Indicadores de Contexto se encuentran las variables elegidas para este trabajo.

**Tabla 2.**  
*Indicadores de la educación primaria por Departamentos 2018-2021*

Año	Magnitud <sup>1</sup>	Descripción	Indicador
		<b>Permanencia escolar<sup>2</sup></b>	
	Atraso	Alumnos con atraso escolar, primaria, total (% de matrícula inicial). Matriculados en Primaria con edad mayor en dos o más años a la edad establecida para el grado en curso.	Porcentaje de atraso
2018		Deserción interanual en Educación Primaria (% de matrícula final). Estudiantes matriculados en primaria en el año t, que no volvieron a ser matriculados en el año t+1, excluyendo aquellos que en el año t fallecieron o aprobaron el 5º grado de secundaria, expresado como el porcentaje del número total de estudiantes matriculados en el mismo nivel educativo en el año t.	Porcentaje de deserción
2019			
2020	Deserción		
2021			

Nota. <sup>1</sup>INEI (2022). <sup>2</sup>ESCALE (2023a)

Los Indicadores de Contexto elegidos son: (i) Tasa de Desnutrición crónica infantil de 0 a 5 años, (ii) Porcentaje de niños y adolescentes que trabajan con edades de 5 a 17 años y (iii) Porcentaje de alumnos de primaria con madres con educación superior universitaria completa. En la primera columna de la Tabla 3, se muestra los nombres de los archivos en Excel, que contienen las variables por años (2016 a 2021), en la segunda columna, la descripción de los Indicadores de Contexto, y, en la última columna, se describe la definición de cada uno de los Indicadores de Contexto, según el MINEDU.

Para obtener los resultados del análisis exploratorio descriptivo espacial (AEDES), los resultados de asociación espacial y los resultados del modelo de regresión espacial, se utilizó el software GeoDa versión 1.18. Para importar los datos hacia GeoDa, se denominó a cada variable con 10 caracteres a lo sumo. La Tabla 4 muestra los nombres asignados a las variables según cada año del periodo de estudio que el GeoDa permitió importar sin mostrar mensajes al respecto.

**Tabla 3.**  
*Descripción, definición y nombre de archivos de los Indicadores de Contexto*

Descripción	Definición <sup>1</sup> de los Indicadores de Contexto	Archivo.xls
Tasa de desnutrición crónica infantil de 0 a 5 años.	Personas menores de 5 años que presentan un retraso en el crecimiento corporal en la relación talla para la edad (inferior a dos desviaciones estándar - Puntaje Z) de acuerdo a los Patrones de Crecimiento Infantil establecidos por la OMS, respecto del total de población del mismo rango de edad.	dci_0a5
Porcentaje de niños, niñas y adolescentes que trabajan con edades de 5 a 17 años.	Número de personas con edades de 5 a 17 <sup>1</sup> años que se encuentran <i>ocupados en la producción económica</i> <sup>1</sup> (trabajo) y en otras <i>actividades productivas</i> <sup>2</sup> (tareas domésticas), respecto de la población total con esas edades.	nyat_5a17
Porcentaje de alumnos de primaria con madres con educación superior universitaria completa	Número de estudiantes cuyas madres tienen educación superior universitaria completa, expresado como porcentaje del número total de alumnos matriculados.	mecuip

Nota. Información tomada de la Serie desde 2016 - ESCALE - Unidad de Estadística Educativa, por ESCALE, 2023b.

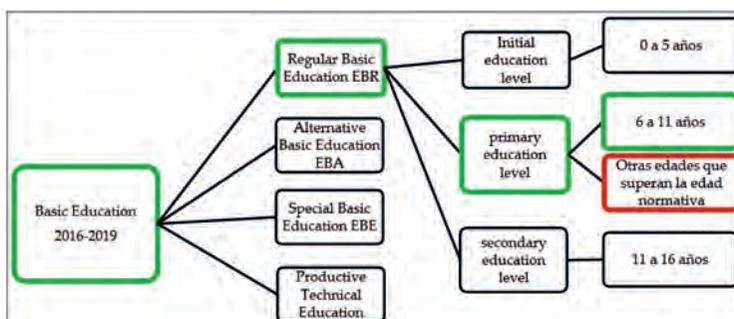
El alcance de la investigación se ubica en el Perú, dividido en 25 regiones, denominados Departamentos y la Provincia Constitucional del Callao, denominada simplemente Callao según el INEI. En resumen, el mapa estará dividido en 25 regiones.

**Tabla 4.**  
Nombre de variables e Indicadores de contexto, por año

Variables dependientes (porcentaje)		Variables independientes (porcentaje)		
Atraso	Deserción Interanual	Desnutrición crónica infantil 0 a 5 años	Niños y adolescentes que trabajan de 5 a 17	Madres con educación universitaria completa
atrat2016	di2015_16	dci2016	nyat2016	meucp2016
atrat2017	di2016_17	dci2017	nyat2017	meucp2017
atrat2018	di2017_18	dci2018	nyat2018	meucp2018
atrat2019	di2018_19	dci2019	nyat2019	meucp2019
atrat2020	di2019_20	dci2020	nyat2020	meucp2020
atrat2021	di2020_21	dci2021	nyat2021	meucp2021

El sector objetivo es la Educación Básica Regular (EBR), en el nivel de educación primaria (sin discriminar sector público o privado), que incluye las edades de 6 a 11 años, que es la edad reglamentaria y otras edades que superan la edad normativa, la Figura 3 (Jopen, Gómez, Olivera, 2014, p. 10). El periodo de análisis va desde el año 2016 hasta el año 2021. Las salidas de análisis espacial se realizaron a nivel Departamentos del Perú.

**Figura 3.**  
Educación Básica Regular, Nivel primaria



Para el análisis espacial, se descargó del Instituto Geográfico Nacional (IGN por sus siglas) del Ministerio de Defensa del Perú (MINDEF por sus siglas) (IGN,2023), el archivo de tipo shapefile con extensión .shp del mapa del Perú, subdividido en 25 regiones, 24 Departamentos más la Provincia Constitucional del Callao.

Cabe señalar que, la información departamental, proporcionada por el MINEDU a través de la página web ESCALE, tiene la información, correspondiente a todos los indicadores, dividida en 26 áreas (no en 25). En la división del MINEDU, el Departamento de Lima ha sido subdividido en dos, en Lima Metropolitana y Lima Provincias.

Para poder utilizar la data de escale que coincida con el mapa de 25 regiones del MINDEF, se realizó un promedio ponderado por la proporción del tamaño de la población de Lima Metropolitana y Lima Provincias. La Tabla 5 muestra estas proporciones de 2016 a 2021.

**Tabla 5.**

*Total y proporción de la población del Departamento de Lima<sup>a</sup>*

Total y proporción de la población del Departamento de Lima						
Población	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Lima Metropolitana	9031034 <sup>b</sup>	8574974 <sup>c</sup>	9256429	9476975	9674755	9846795
Lima Provincias	954024 <sup>d</sup>	910431 <sup>e</sup>	924212	939164	953715	967655
Lima (sin callao)	9985058	9485405	10180641	10416139	10628470	10814450
Proporción	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Lima Metropolitana	0.90445484	0.9041769	0.90921868	0.90983569	0.91026789	0.91052203
Lima Provincia	0.09554516	0.0959823	0.09078132	0.09016431	0.08973211	0.08947797

Nota. <sup>a</sup>INEI (2022, p. 89). <sup>b</sup>ASIS (2016). <sup>c</sup>López (2020a). <sup>d</sup>INEI (2017, p. 88). <sup>e</sup>López (2020b)

## 2.1 AEDES Y AUTOCORRELACIÓN ESPACIAL

Se analizarán los resultados descriptivos exploratorios de los indicadores. Primer objetivo, realizar un diagnóstico de Análisis Exploratorio Descriptivo (AED). Seguidamente, se analizará la autocorrelación espacial, por último, el Modelo de Regresión Espacial.

Se calcularán los siguientes indicadores de asociación espacial entre los Departamentos. Se trata del Índice de Morán y el Índice de Geary Local. Una autocorrelación espacial positiva de Morán significa que los valores geográficamente próximos de una variable se consideran similares en el mapa. Tres casos: (1) Los valores altos tienden a situarse cerca de los valores altos, (2) Los valores medios tienden a situarse cerca de valores medios, (3) Los valores bajos tienden a situarse cerca de los valores bajos. Una autocorrelación espacial negativa de Morán, significa que los valores geográficamente próximos de una variable tienden a ser disímiles en el mapa (Shekhar & Xiong, 2017, p. 1361). Es decir (1) Los valores altos tienden a situarse cerca de los

valores bajos, (2) Los valores medios tienden a situarse cerca de valores medios, (3) los valores bajos tienden a situarse cerca de los valores altos. Interpretación alternativa de la expresión matemática de Morán: es la covarianza ponderada por la matriz de pesos, dividido por varianza de los valores.

Se podrían aplicar varios tipos de matrices de pesos para establecer cuál o cuáles de estas matrices incluir en los cálculos de asociación espacial. Tras varias pruebas de ensayo, se seleccionó la matriz de pesos  $W = \{w_{ij}\}_{n \times n}$ , con el criterio (1):  $w_{ij} = 1$  si  $A_i$  comparte frontera con  $A_j$ , en caso contrario  $w_{ij} = 0$ .

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \cdot \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}} \quad (1)$$

El índice de Geary se enfoca en la disimilaridad. Utiliza la diferencia al cuadrado como medida de disimilaridad. Sus valores están entre 0 y 2. Valores menores a 1 implica autocorrelación positiva, valores mayores a 1 implica autocorrelación espacial negativa. Valores igual a uno indica ausencia de autocorrelación (Anselin, 2019, p. 3).

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - y_j)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \cdot \frac{n-1}{2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}} \quad (2)$$

LISA (local indicator of spatial association) (Anselin, 1995, p. 94) es cualquier estadístico que satisface primero, que LISA es una medida local de autocorrelación, segundo, permite la descomposición de un coeficiente de autocorrelación global en partes separadas, haciendo posible identificar las localizaciones individuales que más contribuyen a la autocorrelación global (Sokal, Oden & Thomson, 1998, p. 43).

Geary Local (Anselin, 1995, p. 100) es la versión local LISA. La hipótesis nula asociada con Geary Local es la aleatoriedad espacial. Esto significa que, enfocándose en una observación, cualquier organización de valores en los vecinos circundantes, es igualmente probable. El rechazo de la hipótesis nula, direcciona a la ausencia de aleatoriedad espacial local. Geary Local, sin embargo, no sugiere una forma particular de asociación. Es decir, Geary local no está limitado a una asociación lineal, también puede detectar asociaciones de forma no lineal. Las diferencias al cuadrado sugieren similitud, pero no puede revelar el tipo de similitud (Anselin, 2019, p. 7).

Todas las salidas gráficas del análisis espacial descriptivo, de autocorrelación espacial y del modelo de regresión espacial, se realizaron con GeoDa 1.18 (GeoDa, 2023). Entre las salidas que se analizaron están los mapas de percentiles de atraso y deserción expresada en porcentaje, para cada año desde 2016 hasta 2021; gráficos de burbujas y gráficos de coordenadas paralelas. Asimismo, las salidas de autocorrelación espacial se realizaron también en GeoDa.

Para desarrollar la estimación por Regresión Espacial Geográficamente Ponderada, con el programa de GeoDa se aplicó Modelo Espacial General de Anselín (Arbia, 2006, p. 116).

$$y = X \beta + \rho W^{(1)} y + e \quad \dots\dots (3)$$

$$e = \lambda W^{(2)} e + u \quad \dots\dots (4)$$

De (3) y (4):

$$y = X \beta + \rho W^{(1)} y + \lambda W^{(2)} e + u \quad \dots\dots(5)$$

- $\beta$  vector k-por-1 de parámetros regresivos
- $x_i$  vector k-por-1 de variables explicativas en el Departamento i
- $\rho$  parámetro auto-regresivo
- $w_{ij} \in W^{(1)}$  matriz de pesos (puede o no ser estandarizada)
- $e$  campo aleatorio espacial autorregresivo

Sustituyendo e por su valor  
 $e = y - X \beta - \rho W^{(1)} y \quad \dots\dots\dots(6)$

Se tiene  
 $y = X \beta + \rho W^{(1)} y + \lambda W^{(2)} [y - X \beta - \rho W^{(1)} y] + u$   
 Resultando en,  
 $y = X \beta + \rho W^{(1)} y + \lambda W^{(2)} y - \lambda W^{(2)} X \beta - \lambda \rho W^{(1)} W^{(2)} y + u \quad \dots\dots(7)$

En este trabajo, sólo se utiliza un orden de contigüidad, así  $W^{(1)} = W^{(2)} = W$ , conduciendo al modelo,  
 $y = X \beta + (\rho + \lambda) W y - \lambda W X \beta - \lambda \rho W^2 y + u \quad \dots\dots(8)$

En la estimación se utiliza la máxima verosimilitud, porque los estimadores Mínimo Cuadrados Ordinarios no proporcionan estimadores consistentes de los parámetros. La función log-verosímil es:  
 $l(\rho, \lambda, \sigma^2, \beta; y) = X \beta + (\rho + \lambda) W y - \lambda W X \beta - \lambda \rho W^2 y + u \quad \dots\dots(9)$

Esta función se maximiza depender de un enfoque de verosimilitud de perfil obtenido sustituyendo algunos de los parámetros considerados, inicialmente, como parámetros nuisance, por estimaciones coherentes de los mismos.

### 3. RESULTADOS

#### 3.1 DISTRIBUCIÓN DE ALUMNOS EN SITUACIÓN DE ATRASO ESCOLAR Y DE DESERCIÓN INTERANUAL

Las mayores tasas de (a) atraso escolar (aquellos alumnos que se matriculan a primaria con edad mayor a dos o más años a la edad establecida para el grado al que se matricula), se concentran en el Departamento de Loreto. Moquegua y Tacna están en posición ventajosa por tener las menores tasas de atraso desde el 2016 al 2021. La (b) deserción interanual (entendida como el número de estudiantes matriculados en un determinado nivel de primaria y que al año siguiente no volvieron a matricularse) máxima, está concentrado en Departamento de Loreto, en todos los años de estudio y las menores tasas de deserción, están concentradas en el Departamento de Moquegua. El rango promedio de estas diferencias es de 12.2 puntos porcentuales para atraso escolar y 3.3 puntos porcentuales para deserción interanual. Ver Tabla 6.

**Tabla 6.**

*Estadísticos de Atraso y Deserción interanual de alumnos de primaria*

Atraso escolar	atrat2016	atrat2017	atrat2018	atrat2019	atrat2020	atrat2021
Media	6.0	5.6	4.8	4.5	4.2	3.4
Mediana	5.7	4.8	3.9	3.6	3.4	2.4
var.	11.94	10.46	11.27	8.02	7.38	5.87
d.s.	3.45	3.23	3.36	2.83	2.72	2.42
Rango	14.05	12.39	14.14	11.53	11.56	9.76
Valor máximo	15.6	14.0	15.4	12.7	12.8	10.6
Valor mínimo	1.6	1.6	1.2	1.2	1.3	0.8
<b>Departamento</b>						
Loreto		14.0	15.4	12.7	12.8	
Moquegua	1.6	1.6				
Tacna			1.2	1.2	1.3	0.8
Ucayali						10.6

Deserción interanual	di2015_16	di2016_17	di2017_18	di2018_19	di2019_20	di2020_21
Media	1.5	1.5	1.4	1.2	1.4	1.0
Mediana	1.2	1.3	1.3	1.1	1.4	0.9
var.	0.85	0.65	0.71	0.52	0.70	0.44
d.s.	0.92	0.81	0.84	0.72	0.84	0.67
Rango	3.8	3.3	3.6	3.0	3.4	2.8
Valor máximo	4.1	3.8	4.0	3.3	3.7	3.1
Valor mínimo	0.3	0.5	0.4	0.3	0.4	0.3
<b>Departamento</b>						
Loreto	4.1	3.8	4.0	3.3	3.7	3.1
Moquegua	0.3	0.5	0.4	0.3	0.4	0.3

### 3.2 ATRASO ESCOLAR 2016 A 2021

Espacialmente, a nivel de percentiles, la tasa de atraso escolar en el año 2016 se ha concentrado en el percentil 50% - 90% con un total de 11 departamentos ubicados en Amazonas y Ayacucho de norte a sur y Lima a Ucayali de oeste a este. De igual manera, el percentil de 10% - 50% con un total de 10 departamentos se concentra en el sur del país, sumando a ellos algunos casos registrados en Tumbes, Piura y Lambayeque. Sin embargo; el percentil de 90% - 99% concentra 02 departamentos, tales como Loreto y Huánuco con los mayores valores de atraso escolar Figura 4.

Figura 4.

Percentiles de tasa de atraso escolar por Departamentos 2016 a 2021

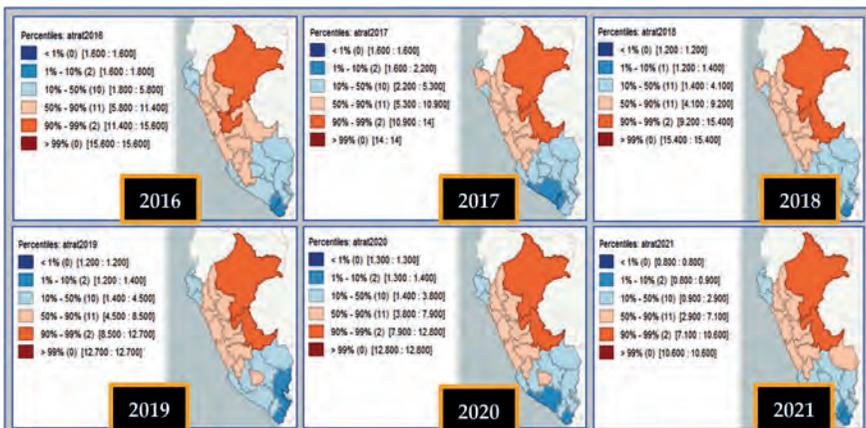


Figura 5. Atraso escolar vs Desnutrición, Niños y adolescentes que trabajan y madres con estudios superiores, por cuartiles 2016 a 2017

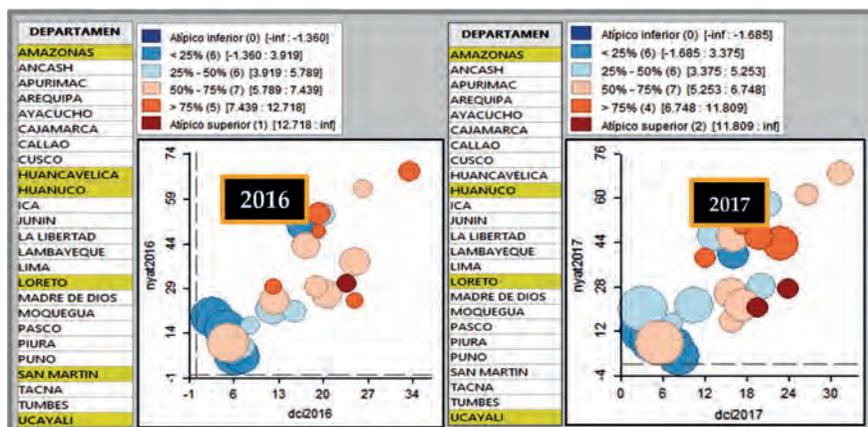
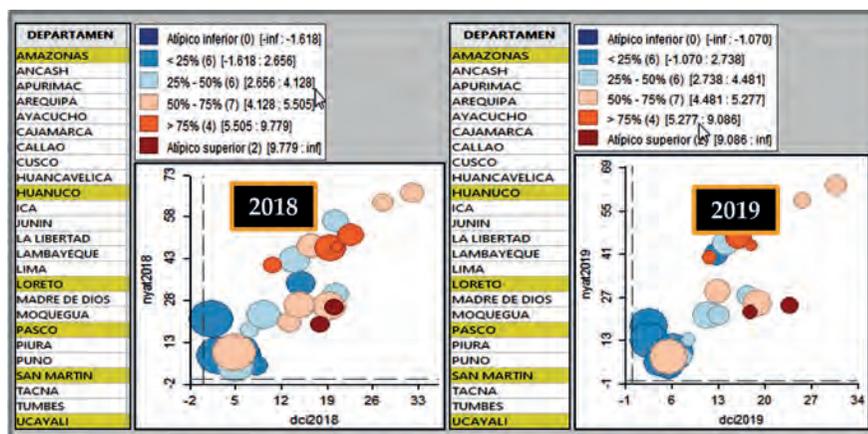
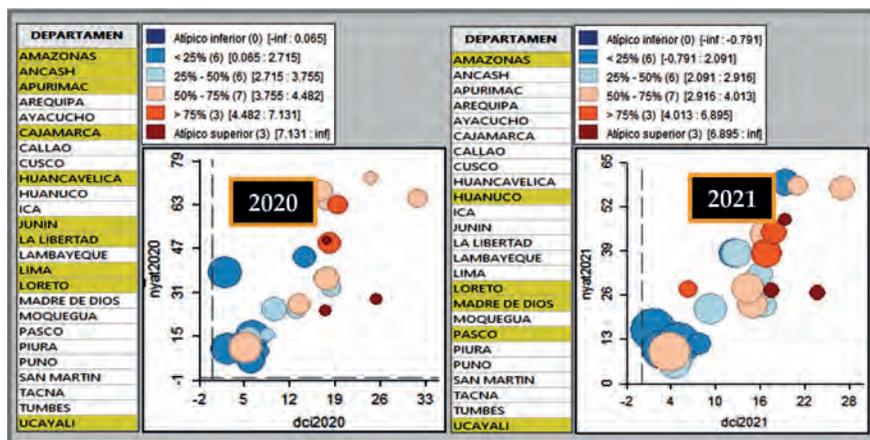


Figura 6. Gráfico burbujas de atraso escolar en primaria vs Desnutrición, Niños y adolescentes que trabaja y madres con estudios superiores, por cuartiles 2018 a 2019



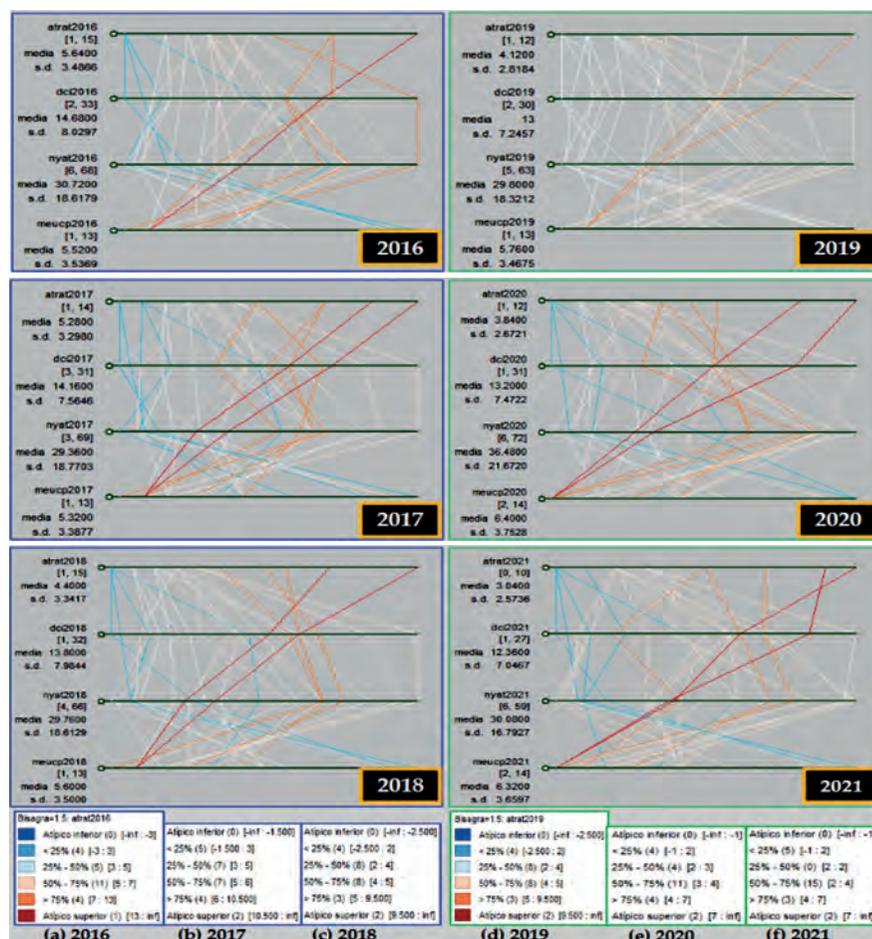
**Figura 7.**

Gráfico burbujas de atraso escolar de primaria vs Desnutrición, Niños y adolescentes que trabaja y madres con estudios superiores, por cuartiles 2020 a 2021



Se utiliza la siguiente numeración: (a) atraso escolar, (i) Desnutrición crónica infantil de 0 a 5 años, (ii) Niños y adolescentes que trabajan con edades de 5 a 17 años y (iii) Alumnos de primaria con madres con educación superior universitaria completa. El Diagrama de Burbujas para el atraso escolar con las variables (i), (ii) y (iii), en los periodos 2016-2017; 2018-2019 y; 2020-2021 se muestran en las Figura 5, Figura 6 y Figura 7 respectivamente. De forma general, destaca (iii), porque muestra una relación creciente (tamaño de la burbuja) para valores muy bajos de (0), (i) y (ii), color, abscisas y ordenadas respectivamente. Amazonas, Huánuco, Loreto y Ucayali representan los Departamentos con mayor atraso escolar, a partir del tercer cuartil siempre asociados a valores altos de (i) y (ii), y valores medios de (iii), abscisas, ordenadas y tamaño, en ese orden. Desde el tercer cuartil hacia adelante, el comportamiento de las variables es como sigue: Loreto y Ucayali predominan como datos extremos; Amazonas, Huánuco, Pasco y San Martín, predominan en el último cuartil de atraso escolar. Ancash, Apurímac, Cajamarca, Junín, La Libertad y Lima, entre el segundo y tercer cuartil del atraso escolar.

**Figura 8.**  
Atraso escolar en primaria de 2016 a 2021 vs desnutrición crónica infantil, madres con educación superior completa y niños y adolescentes de 5 a 17 que trabajan

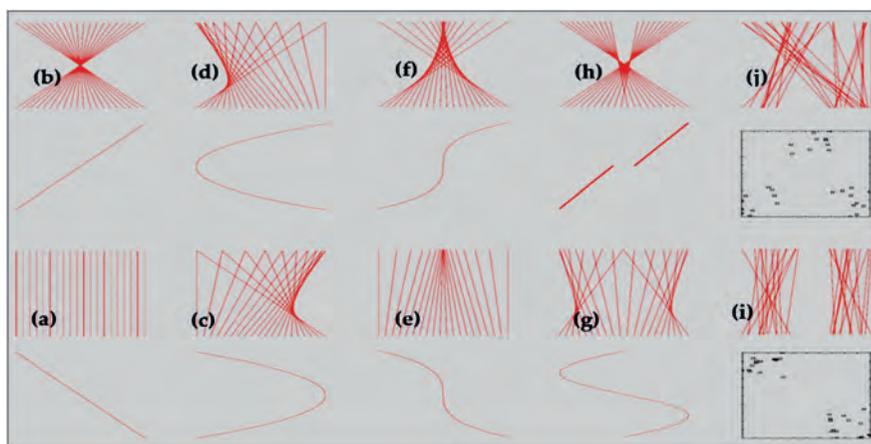


De acuerdo a la interpretación de coordenadas paralelas (Lind, Johansson & Cooper, 2009, p. 26) de la Figura 9, la Figura 8 relaciona el atraso escolar de primaria, la (i) Tasa de Desnutrición crónica infantil de 0 a 5 años, (ii) Porcentaje de niños y adolescentes que trabajan con edades de 5 a 17 años y (iii) Porcentaje de alumnos de primaria con madres con educación superior universitaria completa. Aproximadamente, en todos los años escolares de 2016 a 2021, se vislumbran tres agrupamientos, de las líneas color turquesa, de color celeste y de color amarillo. Las líneas de color naranja lo mismo, excepto para los años 2016 y 2021. Las líneas de color rojo son un agrupamiento

de los valores atípicos, de acuerdo a la Figura 9 (j) excepto el año 2019.

**Figura 9.**

*Patrones de coordenadas paralelas*

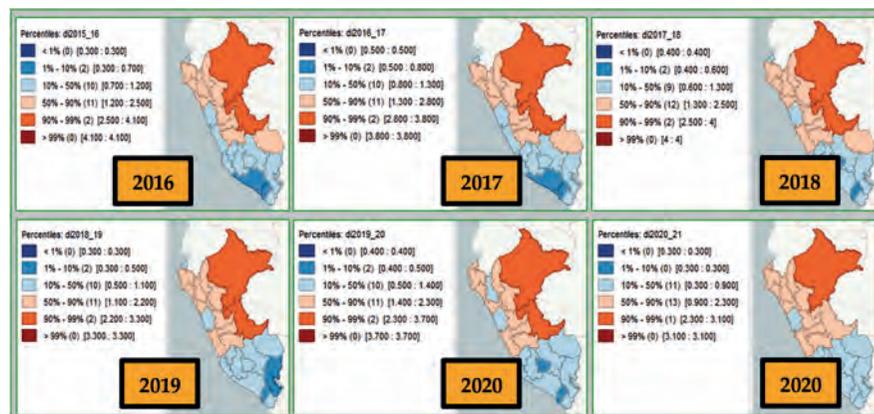


*Nota.* (a) y (b) relación lineal positiva y negativa respectivamente; (c) y (d) relaciones cuadráticas; (e) y (f) relaciones cúbicas; (g) discontinuidad o brecha; (h) relación sinusoidal; (i) y (j) agrupaciones dispersas. Elaboración propia

### 3.3 DESERCIÓN ESCOLAR EN PRIMARIA 2016 A 2021

Del mismo modo que para el análisis de atraso escolar, a nivel percentiles, en el caso de la tasa de deserción escolar interanual, en la Figura 10 se observa que el percentil 90% - 99% en el último año (2021) solo considera a Loreto, convirtiéndose Ucayali en uno de los 13 departamentos que conforma en grupo del percentil 50% - 90% en el año 2021, que se ubican principalmente en el norte y centro del país. Asimismo; se observa que, en Lima, desde el 2018 hasta el 2021, la deserción escolar en primaria, ha descendido al percentil 50% - 90%, de los que entre 2016 y 2017 se encontraban en el percentil 10% - 50%.

**Figura 10.**  
Distribución por percentiles de la tasa de deserción interanual escolar de primaria por departamentos 2016 a 2021



Cabe indicar, que la deserción, ubicada en el percentil 10% - 50% al 2021 se ha concentrado en el sur del país, con un total de 11 departamentos, y que coincide con la reubicación de 02 departamentos que permurtan en ese espacio pertenecientes al percentil 1% - 10%.

**Figura 11.**  
Gráfico burbujas de deserción escolar vs Desnutrición, Niños y adolescentes que trabaja y madres con estudios superiores, por cuartiles 2016 a 2017

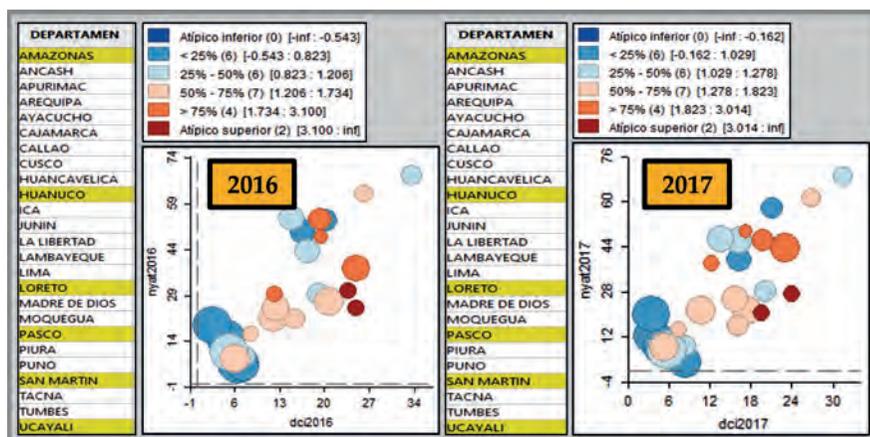


Figura 12.

Gráfico burbujas de deserción escolar vs Desnutrición, Niños y adolescentes que trabaja y madres con estudios superiores, por cuartiles 2018 a 2019

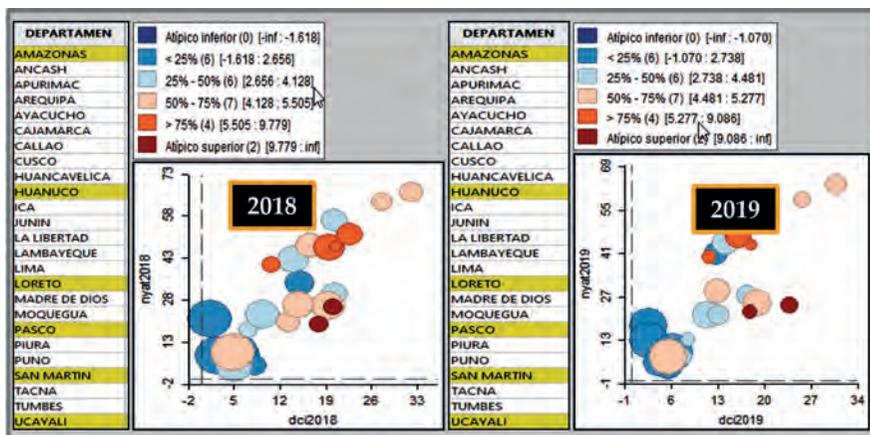
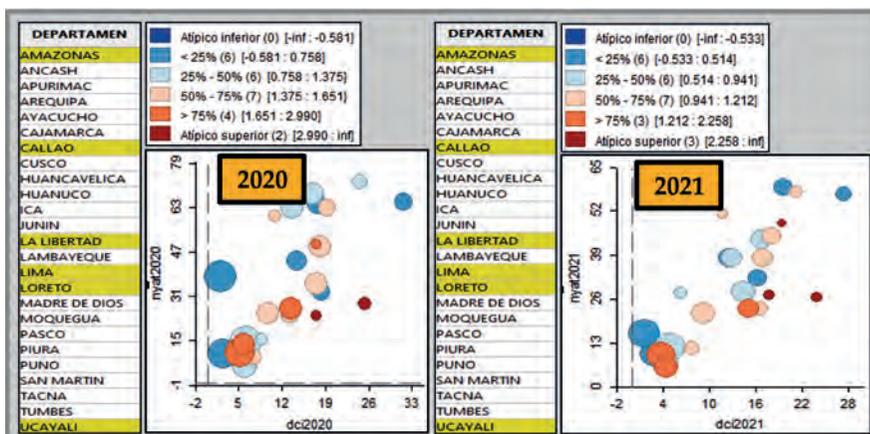


Figura 13.

Gráfico burbujas de deserción escolar vs Desnutrición, Niños y adolescentes que trabaja y madres con estudios superiores, por cuartiles 2020 a 2021



La (b) deserción interanual escolar visualizada en las Figura 11, Figura 12 y Figura 13, muestra altos valores de (iii) para bajos valores de (i) y (ii). No obstante, ante altos va-lores de (iii), el 2020 y el 2021, el Callao, La Libertad y Lima pasaron el tercer cuartil de la deserción escolar. En todo el periodo de análisis, 2016 a 2021, Loreto y Ucayali se ubican como atípicos superiores de

la proporción de (a) atraso escolar. Amazonas, Huánuco, Pasco y San Martín, se ubican después del tercer cuartil del atraso escolar. Desde el año 2018, el atraso escolar aumentó en el departamento de La Libertad, ubicándose después del tercer cuartil. Finalmente, desde el 2020, Callao y Lima, pasaron el tercer cuartil del atraso escolar.

Las coordenadas paralelas de la Figura 14, confirman los patrones de agrupamiento de los distintos departamentos del Perú, de acuerdo al ítem (i) de la Figura 9. A observar el ítem (b) de la misma figura, se confirma la relación inversa entre los Indicadores de Contexto (iii) con (ii), en todos los años del periodo de análisis. Los departamentos Loreto y Ucayali siguen mostrándose como datos atípicos superiores en el problema de la deserción interanual escolar.

### 3.4 ASOCIACIÓN ESPACIAL 2016 A 2021

Espacialmente, a nivel de departamentos del Perú, los indicadores (c) atraso escolar en primaria por cada grado escolar, del 1° al 6° grado, por cada año; (a) atraso escolar por cada año; la (b) deserción interanual de primaria por cada año y los Indicadores de Contexto, excepto (i) y (ii), son significativos en los indicadores de autocorrelación de Morán univariado, al 0.05 de nivel de significancia, de acuerdo a los resultados de la Tabla 7, lo mismo para todo el periodo de análisis (2016 a 2021). Con respecto a los indicadores de Morán bivariados según la Tabla 8, los indicadores (a) atraso escolar, (b) deserción interanual, a 0.05 de significancia, están espacialmente auto correlacionados con los Indicadores de Contexto (i), (ii) y (iii).

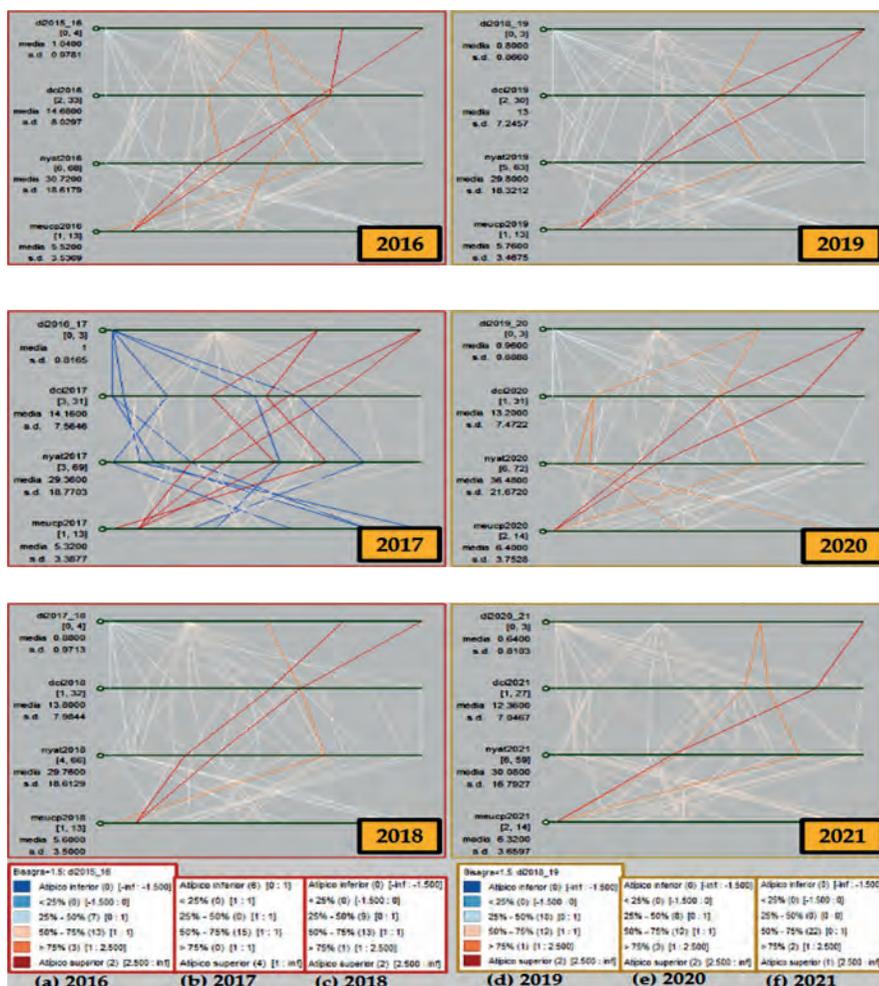
**Tabla 7.**

*Índices de Morán univariado de todos los indicadores*

Índice de Morán y p-value (p.v.)										
pvalue	Moran	pvalue	Moran	pvalue	Moran	pvalue	Moran	pvalue	Moran	pvalue
p.v.	2017	p.v.	2018	p.v.	2019	p.v.	2020	p.v.	2021	p.v.
0.001	0.514	0.001	0.514	0.001	0.551	0.001	0.492	0.002	0.510	0.002
0.002	0.134	0.096	0.379	0.002	0.267	0.014	0.336	0.009	0.317	0.013
0.001	0.458	0.003	0.447	0.002	0.525	0.002	0.491	0.002	0.405	0.009
0.001	0.569	0.001	0.511	0.002	0.526	0.001	0.492	0.003	0.505	0.001
0.001	0.551	0.001	0.512	0.001	0.550	0.001	0.468	0.003	0.530	0.001
0.001	0.513	0.001	0.526	0.001	0.535	0.001	0.500	0.002	0.498	0.002
0.003	0.465	0.002	0.488	0.001	0.517	0.001	0.488	0.001	0.504	0.001
p.v.	2017	p.v.	2018	p.v.	2019	p.v.	2020	p.v.	2021	p.v.
0.002	0.539	0.002	0.494	0.002	0.516	0.002	0.443	0.002	0.443	0.002
p.v.	2017	p.v.	2018	p.v.	2019	p.v.	2020	p.v.	2021	p.v.
0.091	0.126	0.112	0.143	0.102	0.198	0.052	0.146	0.093	0.181	0.058

**Figura 14.**

*Deserción escolar de 2016 a 2021 vs desnutrición crónica infantil, madres con educación superior completa y niños y adolescentes de 5 a 17 que trabajan*

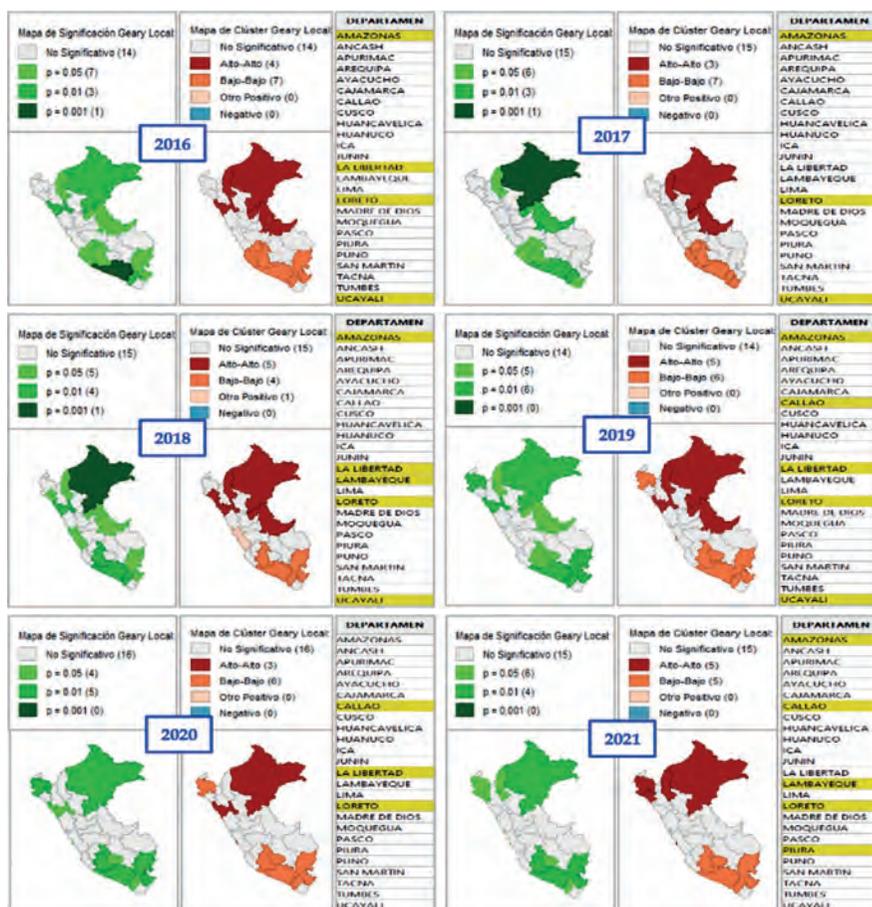


Los departamentos en cluster identificados con el indicador Geary Local alto-alto para la variable (a) atraso escolar en primaria son, Amazonas, La Libertad, Loreto y Ucayali el 2016; Amazonas, Loreto y Ucayali el 2017; Amazonas, La Libertad, Lambayeque, Loreto y Ucayali el 2018; Amazonas, Callao, La Libertad, Loreto y Ucayali el 2019; Callao, La Libertad y Loreto el 2020; y; Amazonas, Callao, Lambayeque, Loreto y Ucayali el 2021. En todos los casos son significativos al 0.05 de nivel de significancia, Figura 15.

**Tabla 8.**  
Índices de Morán bivariado con Indicadores de Contexto

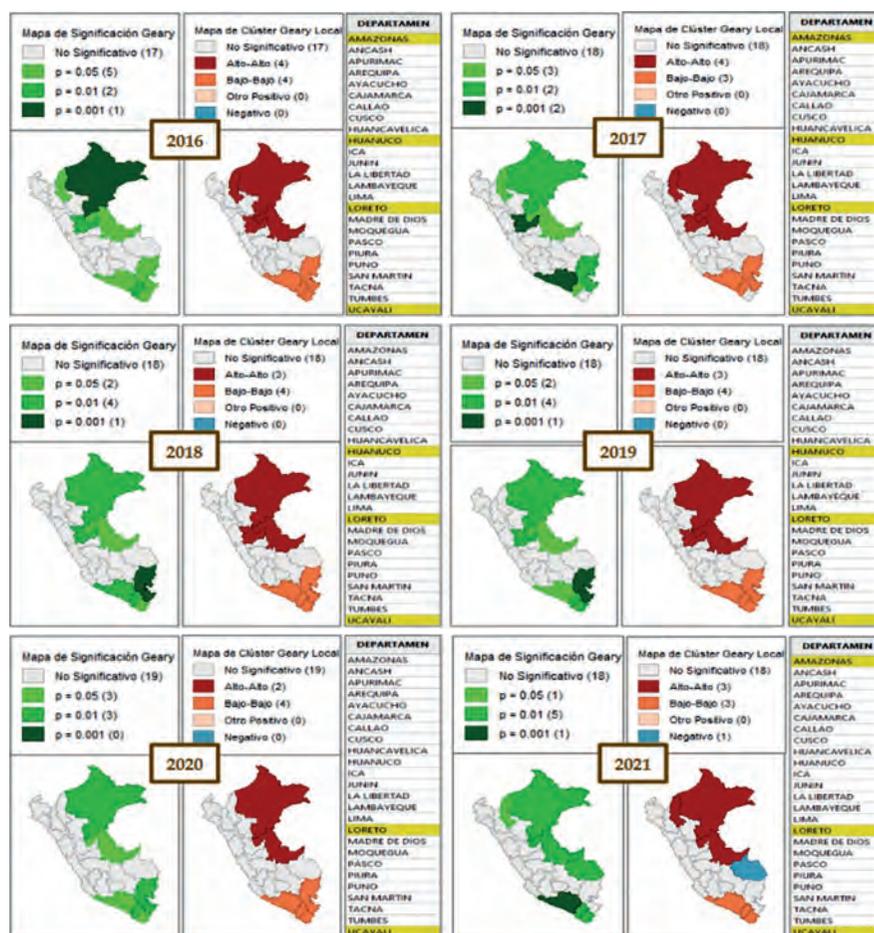
		Índice de Morán Bivariado y p-value									
Vars. dep.	I.Contexto	Moran	pvalue	Moran	pvalue	Moran	pvalue	Moran	pvalue	Moran	pvalue
<b>Atraso escolar</b>		2016	p.v.	2017	p.v.	2018	p.v.	2019	p.v.	2020	p.v.
atrasot	tdci_0a5	0.279	0.019	0.261	0.018	0.265	0.018	0.296	0.013	0.260	0.018
atrasot	nyat_5a17	0.131	0.117	0.184	0.049	0.221	0.032	0.189	0.042	0.211	0.035
atrasot	mesuc_p	-0.415	0.002	-0.394	0.003	-0.393	0.002	-0.393	0.002	-0.390	0.002
<b>Deserción esc.</b>		2016	p.v.	2017	p.v.	2018	p.v.	2019	p.v.	2020	p.v.
desercion_ia	tdci_0a5	0.264	0.013	0.261	0.014	0.249	0.020	0.278	0.018	0.223	0.028
desercion_ia	nyat_5a17	0.165	0.080	0.204	0.040	0.233	0.027	0.202	0.040	0.170	0.079

**Figura 15.**  
Geary Local y conglomerados para el indicador estudiantes rezagados en la escuela primaria de 2016 a 2021



Los clusters correspondientes al indicador (b) deserción interanual escolar de primaria, son, Amazonas, Huánuco, Loreto y Ucayali el 2016 y 2017; Huánuco, Loreto y Ucayali el 2018 y 2019; Loreto y Ucayali el 2020; y; Amazonas, Loreto y Ucayali el 2021, Figura 16. Todos significativos al 0.05 de nivel de significancia.

**Figura 16.**  
Figura 16 Geary Local y conglomerados para el indicador estudiantes con abandono interanual de la escuela primaria de 2016 a 2021



En esta sección, se eligió realizar el modelo de Regresión Espacial con los indicadores (a) atraso escolar y (b) deserción interanual escolar, para cada año del periodo de estudio. En total se corrieron 12 modelos. La Tabla 9 muestra los indicadores de evaluación de los modelos.

**Tabla 9.**  
Salidas del modelo de Regresión Espacial simple

Variable dependiente	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> adj	Prob F	J.Bera	B. Pagan	K. Bassett	White	AIC	SC
Atraso2016	0,560902	0,498174	0,000517067	0,07833	0,59879	0,69783	0,77106	119,08	123,955
Atraso2017	0,426853	0,344975	0,00756012	0,32928	0,39845	0,19268	0,11032	122,682	127,558
Atraso2018	0,426585	0,344668	0,00759541	0,24995	0,00743	0,03089	0,13652	124,824	129,699
Atraso2019	0,505025	0,434315	0,00173922	0,48095	0,03697	0,00247	0,03212	112,52	117,396
Atraso2020	0,483998	0,410283	0,00264417	0,50175	0,00398	0,00332	0,01034	111,616	116,492
Atraso2021	0,497977	0,426259	0,00200564	0,79915	0,03856	0,05578	0,04479	105,385	110,26
	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> adj	Prob F	J.Bera	B. Pagan	K. Bassett	White	AIC	SC
Deserción2016	0,524004	0,456005	0,00117181	0,73694	0,07891	0,04741	0,19115	55,1931	60,0686
Deserción2017	0,453600	0,375543	0,00469384	0,56485	0,06194	0,02878	0,03899	53,0109	57,8865
Deserción2018	0,380651	0,292172	0,0162838	0,75408	0,02193	0,01833	0,06676	58,4789	63,3544
Deserción2019	0,389279	0,302033	0,0141814	0,52368	0,07978	0,00606	0,05503	50,3788	55,2543
Deserción2020	0,355013	0,262872	0,0242414	0,53581	0,10081	0,01001	0,10384	59,243	64,1185
Deserción2021	0,516390	0,447303	0,0013757	0,67605	0,23052	0,14293	0,14464	40,4302	45,3057

Evaluando los indicadores al 0.05 de nivel de significancia, todos los indicadores de Jarque-Bera para normalidad, no rechazan la hipótesis de normalidad. La heterocedasticidad, evaluada con Breush-Pagam, Koenker-Basset y con White, presenta significancia a partir del modelo de Atraso2019 hacia Atraso2021; y, significancia para Deserción2016 hasta Deserción 2020 sólo con el indicador Koenker-Basser; para Deserción2018 con Breush Pagam y para Deserción2017 con White. El p-value de F, señala que todos los modelos son significativos para al menos uno de los Indicadores de Contexto: (i) desnutrición crónica infantil, (ii) niños y adolescentes de 5 a 17 años que trabajan y (iii) madres con educación superior completa. Al mismo tiempo, excepto para los modelos de Atraso2016, Deserción2016 y Deserción2021, los coeficientes de determinación y los coeficientes de determinación ajustados, explican menos del 50% de la variabilidad.

Los estimadores de los coeficientes, son individualmente significativos de manera distinta para cada año e indicador. Para (a) atraso escolar, los Indicadores de Contexto individualmente significativos son: dci2016 el 2016, el 2019 y el 2020; meucp2021 el 2021. Para (b) deserción interanual escolar, los Indicadores de Contexto, individualmente significativos son: dci2016 y nyat2016 el 2016; nyat2017 y meucp2017 el 2017; meucp2018 el 2018; nyat2019 el 2019; nyat2020 el 2020; dci2021, nyat2021 y meucp2021 el 2021 (ver Tabla 10).

Tabla 10.  
Estimadores de los coeficientes 2016 a 2021

Estimadores <sup>1</sup> de los coeficientes, Atraso escolar primaria. 2016 a 2021 <sup>566</sup>					
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2016	CONSTANT	5,42045	2,16457	2,50878	0,02039
	dci2016	0,270689	0,109025	2,48281	0,02156
	nyat2016	-0,0431066	0,0419048	-1,02868	0,21532
	meucp2016	-0,338115	0,18156	-1,86228	0,07662
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2017	CONSTANT	4,71188	2,36212	1,99477	0,05921
	dci2017	0,256853	0,128264	2,00254	0,05831
	nyat2017	-0,0412153	0,0454788	-0,906253	0,37508
	meucp2017	-0,262163	0,205252	-1,28214	0,21377
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2018	CONSTANT	5,12129	2,37974	2,15624	0,04281
	dci2018	0,292415	0,142974	2,02797	0,05425
	nyat2018	-0,0754594	0,0541943	-1,44774	0,16245
	meucp2018	-0,321935	0,213057	-1,51056	0,14580
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2019	CONSTANT	3,5944	1,94169	2,00568	0,05795
	dci2019	0,278871	0,107638	2,59081	0,01706
	nyat2019	-0,05152	0,0366208	-1,40685	0,17410
	meucp2019	-0,229207	0,165446	-1,386	0,18029
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2020	CONSTANT	4,59331	1,90987	2,40504	0,02547
	dci2020	0,205127	0,0991131	2,20299	0,03890
	nyat2020	-0,0362663	0,0265633	-1,36528	0,18661
	meucp2020	-0,264719	0,159195	-1,72867	0,09855
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2021	CONSTANT	6,02529	1,85689	3,28021	0,00282
	dci2021	0,16977	0,0972205	1,74624	0,09538
	nyat2021	-0,0707435	0,0362108	-1,95366	0,06419
	meucp2021	-0,391129	0,14452	-2,7064	0,01322
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
Estimadores <sup>1</sup> de los coeficientes, Deserción escolar primaria. 2016 a 2021					
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2016	CONSTANT	1,7336	0,6032	2,87401	0,00908
	dci2016	0,0892162	0,0303819	2,93649	0,00788
	nyat2016	-0,032666	0,0116776	-2,79733	0,01079
	meucp2016	-0,0822133	0,0505951	-1,64116	0,06578
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2017	CONSTANT	2,16586	0,586322	3,69391	0,00135
	dci2017	0,0537595	0,0218279	1,68929	0,10596
	nyat2017	-0,0243162	0,0112889	-2,154	0,04301
	meucp2017	-0,127285	0,0509483	-2,49832	0,02085
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2018	CONSTANT	2,32676	0,631348	3,70125	0,00132
	dci2018	0,051328	0,0281962	1,8438	0,19325
	nyat2018	-0,0294548	0,0143777	-2,04864	0,05320
	meucp2018	-0,128486	0,0565228	-2,27213	0,03364
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2019	CONSTANT	1,72849	0,560204	3,10277	0,00539
	dci2019	0,0558459	0,0310607	1,89454	0,07201
	nyat2019	-0,0253222	0,0105675	-2,39623	0,02596
	meucp2019	-0,0826747	0,0477419	-1,7317	0,09799
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2020	CONSTANT	2,44704	0,670033	3,65213	0,00149
	dci2020	0,02714	0,0326666	1,13694	0,26837
	nyat2020	-0,0235253	0,00981911	-2,52442	0,01971
	meucp2020	-0,0950804	0,0527238	-1,7695	0,09128
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability
2021	CONSTANT	2,11974	0,506528	4,18489	0,00042
	dci2021	0,0868378	0,0265198	2,14922	0,04396
	nyat2021	-0,0358272	0,00987759	-3,62712	0,00158
	meucp2021	-0,107763	0,0394223	-2,73356	0,01245
	Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Probability

Finalmente, para el diagnóstico de dependencia espacial, los resultados del GeoDa 1.18 utiliza una matriz de pesos estandarizada por filas. La Tabla 11, los indicadores de Morán y de Lagrange, de 2016 a 2021 todos los modelos muestran dependencia espacial. Sin embargo, con los indicadores robustos en general, no se puede afirmar la dependencia espacial.

**Tabla 11.**  
*Diagnóstico para la dependencia espacial*

Variable	Moran's I	Lagrange	Robust	Lagrange	Robust	Lagrange
Atraso2016	0,01377	0,00359	0,01357	0,07911	0,40412	0,01017
Atraso2017	0,00554	0,00495	0,04192	0,04076	0,51381	0,01557
Atraso2018	0,00141	0,00243	0,06541	0,01502	0,73075	0,00952
Atraso2019	0,00039	0,00109	0,08711	0,00541	0,99204	0,00483
Atraso2020	0,00239	0,00506	0,10749	0,02150	0,88840	0,01948
Atraso2021	0,00106	0,00806	0,30662	0,01130	0,50611	0,02396
Deserción2016	0,00061	0,00346	0,17788	0,00854	0,66773	0,01271
Deserción2017	0,00148	0,00412	0,11961	0,01595	0,96308	0,01632
Deserción2018	0,00115	0,00494	0,18841	0,01295	0,94529	0,01920
Deserción2019	0,00035	0,00244	0,25468	0,00497	0,95825	0,01011
Deserción2020	0,00063	0,00345	0,19879	0,00824	0,78128	0,01335
Deserción2021	0,00312	0,00922	0,18525	0,02479	0,90871	0,03349

#### 4. DISCUSIONES

La data utilizada de ESCALE, perteneciente al MINEDU, está clasificada en Producto, Impacto, Recursos, Acceso, Permanencia, Progreso, Entorno y Contexto. Si bien, en esta investigación se abordó Permanencia y Contexto, se puede continuar el trabajo involucrando la Permanencia y el Impacto, o la Permanencia y el Producto, por ejemplo. Del mismo modo, se puede los puede analizar con factores socioeconómicos pertinentes de otras fuentes. Se debe advertir que algunas bases de datos del MINEDU están registradas adecuadamente para analizar su comportamiento espacial, pero otras no tienen data completa, por lo que sería conveniente un plan de imputación o descartar su utilización.

Investigaciones orientadas a la educación primaria, no espaciales, datan de 2015 para atrás. De hecho, más del 90% de la información oficial disponible y más actualizada, está limitada hasta el año 2021 (ESCALE, 2023b). Consecuentemente, los estudios de periodos postpandemia, en educación, particularmente en

educación primaria, están en el tiempo preciso para ser abordados, específicamente, con enfoque espacial.

Visto los resultados descriptivos, el mayor nivel en atraso y deserción escolar primaria a lo largo del periodo 2016 a 2021 lo tiene el departamento de Loreto, en segundo lugar, Ucayali. El menor nivel de atraso y deserción lo tiene Moquegua. Ahora, esta visualización inicial de los indicadores, da lugar a indagar, qué otras condiciones dan lugar a esos valores extremos, de atraso y deserción, en dos regiones geográfica y ambientalmente diferentes. Loreto es zona cálida de Selva al noreste del país, Moquegua es zona de clima moderado, de Sierra, al sur del país. En relación a atraso y deserción escolar primaria, quedan por explorar otros factores como por ejemplo la dependencia demográfica entre otros, que contribuirá a enriquecer los resultados de esta investigación.

Específicamente, el factor (iii) alumnos con madres con educación superior universitaria completa, cuya relación de asociación espacial es inversa, sugiere estudiar los factores educacionales del entorno humano a los alumnos con resultados más desventajosos, no solamente el de la madre, porque los hijos y sus madres no siempre comparten suficiente tiempo juntos.

Estudios espaciales de los cluster visualizados, uno a uno, a nivel distrital, son una oportunidad para seguir profundizando en el tema de la educación primaria desde un enfoque geográfico. En esa misma dirección, queda pendiente analizar indicadores de educación primaria, asociada a variables ambientales, familiares, de género, entre otras. Otro tema, es abordar geográficamente, las características de cada cluster visualizado aquí.

**Tabla 12.**

Departamentos del Perú agrupados dentro del tercer cuartil, y como extremos superiores al analizar (a) atraso y (b) deserción escolar primaria en el gráfico Burbujas

Departamento	Atraso escolar de primaria										Deserción interanual escolar primaria														
	2016		2017		2018		2019		2020		2021		2016		2017		2018		2019		2020		2021		
	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	Alpico	> 3º cuartil	
Amazon		↓		↓		↓		↓		↓			↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓
Ancaash																									
Apurim																									
Arequip																									
Ayacucho																									
Cajamarca																									
Callao																									
Cusco																									
Huanca		↓																							
Huanuco		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓		↓	
Ica																									
Junín																									
La																									
Lambayeque																									
Lima																									
Loreto	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Madre de Dios																									
Moquegua																									
Pasco																									
Piura																									
Puno																									
S.Martin	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Tacna																									
Tumbes																									
Ucayali	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

#### 4. CONCLUSIONES

Los recientes sucesos han alterado los indicadores de acceso y permanencia de la educación primaria en el Perú, las Tabla 1, Figura 1 y Figura 2, muestran claramente que en el año de la pandemia, el 2020, se modificó la tendencia de las cifras de acceso (matrícula y asistencia) a la educación. El acceso a la educación es la información base para saber si hubo atraso o deserción escolar. El cambio de tendencia, es una primera justificación para investigar la educación en periodos pre y post pandemia, específicamente desde un enfoque espacial.

A nivel nacional, descriptiva y visualmente, según los mapas de las Figura 4 y la Figura 10, corroborados en la Tabla 6, la distribución y agrupación de los Departamentos de acuerdo a los percentiles de la tasa (a) atraso escolar y (b) deserción interanual escolar a nivel primaria, tienen poca variabilidad, se puede deducir que el comportamiento de los departamentos en cada uno de los percentiles al 2021 ha sido muy parecido tanto en la tasa de atraso escolar y la tasa de deserción escolar interanual.

El análisis AEDES, mostró que luego de incluir los indicadores sociales (i) desnutrición crónica infantil, (ii) niños y adolescentes de 5 a 17 años que trabajan y (iii) madres con educación superior completa, en el análisis, se confirma que persisten tres agrupaciones de departamentos, cada agrupación está ubicada en diferentes cuartiles, con respecto (a) atraso escolar de primaria y la (b) deserción interanual escolar en primaria.

El análisis de los gráficos de Mapas de Percentiles (Figura 4 y Figura 10), los Gráficos de Burbujas (Figura 5, Figura 6, Figura 7, y; Figura 11, Figura 12, y Figura 13) y de Coordenadas Paralelas (Figura 8 y Figura 14), confirman los 3 agrupamientos de departamentos y, además, muestra que los mismos departamentos agrupados persisten a lo largo de los 6 años de estudio. En términos generales, el grupo de departamentos que se encuentra antes del 2° cuartil, está geográficamente ubicado en la zona Sur del Perú; el grupo de departamentos que se encuentra entre el percentil 50 y el percentil 90, está ubicados en la zona centro hasta la zona norte para el Oeste; y, el tercer grupo de departamentos, ubicados en después del percentil 90, se ubica entre el Centro y Norte del país. La Tabla 12 muestra los resultados más desfavorables, datos mayores al 3° percentil y los datos extremos, por departamento.

El análisis de autocorrelación espacial univariado de (a) atraso escolar y (b) deserción interanual escolar, evidencia que los vecinos geográficos en ciertos sectores del mapa, sí asocian o se afectan unos a otros. Eso también lo demuestran los cluster significativos con los mapas resultantes de Geary Local Figura 15 y Figura 16.

El (a) atraso escolar y (b) deserción interanual de la educación primaria, según los resultados de este estudio, tiene dividido al país en tres grupos claramente. En términos reales, hay grupos de departamentos que están en gran desventaja de permanencia en la escuela primaria, otros, también en desventaja, ubicados después del 3er cuartil, y otros, entre el 2do y el 3er cuartil de los problemas de atraso y deserción.

## 5. REFERENCIAS

- Anselin, L. (1995). Local indicators of spatial association—LISA. *Geographical analysis*, 27(2), 93-115. <https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1995.tb00338.x>
- Anselin, L. (2019). A local indicator of multivariate spatial association: extending Geary's C. *Geographical Analysis*, 51(2), 133-150. <https://doi.org/10.1111/gean.12164>
- Arbia, G. (2006). *Spatial econometrics: statistical foundations and applications to regional convergence*. Springer Science & Business Media.
- ASIS (2016). *Departamentos de Lima 2016* [Archivo PDF]. [https://www.dge.gob.pe/portal/Asis/indreg/asis\\_lima.pdf](https://www.dge.gob.pe/portal/Asis/indreg/asis_lima.pdf)
- Beltrán, A. (2013). El tiempo de la familia es un recurso escaso: ¿Cómo afecta su distribución en el desempeño? *Apunte*, 40(72), 117-156, 2013. <https://doi.org/10.21678/apuntes.72.677>
- Boniolo, P., & Najmias, C. (2018). Abandono e atraso escolar na Argentina: uma abordagem desde as classes sociais. *Tempo Social*, 30(3), 217-247. <https://doi.org/10.11606/0103-2070.ts.2018.121349>
- Camayo-Tolentino, E. V., Minaya-Del-Valle, R. A., & Ruiz-Ruiz, M. F. (2022). Formación ciudadana democrática intercultural de niñas en contextos rurales peruanos. *Revista Brasileira de Educação*, 27. <https://doi.org/10.1590/S1413-24782022270061>
- Cardoso, A. R., & Verner, D. (2007). School drop-out and push-out factors in Brazil: The role of early parenthood, child labor, and poverty. *IZA Discussion Paper*, (2515). <https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.955862>
- CEPAL. (2022). *Perú: migraciones internas y dinámica sociodemográfica de departamentos, provincias y distritos en las dos primeras décadas del siglo XXI* [Archivo PDF]. <https://repositorio.cepal.org/items/cdd34fd1-107a-456c-ac7a-5471ce545170>
- Decreto Supremo N.º 007-2021-MINEDU [Ministerio de Educación]. Decreto Supremo que modifica el reglamento de la Ley N° 2804, Ley General de Educación, aprobado por Decreto Supremo N° 011-2012-ED. 10 de mayo de 2021. D.O. N°9
- ESCALE (2023a). *Magnitudes de la Educación - ESCALE - Unidad de Estadística Educativa*. Recuperado de <https://escale.minedu.gob.pe/magnitudes;jsessionid=10e2cb3352fc-8d5927521e973a68>
- ESCALE (2023b). Serie desde 2016 - ESCALE - Unidad de Estadística Educativa. Recuperado de <https://escale.minedu.gob.pe/ueetendencias2016>
- GeoDa (21 de julio de 2023). *GeoDa on Github*. Recuperado de <http://geodacenter.github.io/>
- IGN (11 de agosto de 2023). *Instituto Geográfico Nacional - Infraestructura de Datos Geoespaciales Fundamentales*. <https://www.idep.gob.pe/>
- Iqbal, A., Hassan, S., Mahmood, H., & Tanveer, M. (2022). Gender equality, education, economic growth and religious tensions nexus in developing countries: A spatial analysis approach. *Heliyon*, 8(11), e11394. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e11394>

- INEI (2017). *Compendio Estadístico Lima Provincias 2016* [Archivo PDF]. [https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones\\_digitales/Est/Lib1521/Libro.pdf](https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones_digitales/Est/Lib1521/Libro.pdf)
- INEI (2022). *Perú: Indicadores de Educación según Departamentos, 2011-2021* [Archivo PDF]. <https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/3839416/Per%C3%BA%3A%20Indicadores%20de%20Educaci%C3%B3n%20seg%C3%BAn%20Departamentos.pdf?v=1668544569>
- Jopen, G., Gómez, W., & Olivera, H. (2014). *Sistema educativo peruano: balance y agenda pendiente*. [Archivo PDF]. <http://files.pucp.edu.pe/departamento/economia/DDD379.pdf>
- Lind, M., Johansson, J., & Cooper, M. (2009). Many-to-many relational parallel coordinates displays. In *2009 13th International Conference Information Visualization* (pp. 25-31). <https://doi.org/10.1109/IV.2009.43>
- López, C. N. (2020a). *Caracterización de la región Lima Metropolitana 2020*. SINEACE. <https://hdl.handle.net/20.500.12982/6234>
- López, C. N. (2020b). *Caracterización de la región Lima 2020*. SINEACE. <https://hdl.handle.net/20.500.12982/6223>
- Ministerio de Salud. (20 de julio de 2023). Sala de situación de Covid. Recuperado de <https://www.dge.gob.pe/covid19.html>
- Nishida, F. H., Nicolella, A. C., Canassa, B. J., Espinoza, D. D. F., & Liduares, T. Q. (2022). Impactos da aposentadoria rural sobre o abandono escolar no Brasil. *Revista de Economia e Sociologia Rural*, 60(spe). <https://doi.org/10.1590/1806-9479.2021.251012>
- Resolución Viceministerial N.º 193-2020-MINEDU de 2020 [Ministerio de Educación]. Aprobar el documento normativo denominado "Orientaciones para la evaluación de competencias de estudiantes de la Educación Básica en el marco de la emergencia sanitaria por la COVID-19". 11 de octubre de 2020
- Seshie-Nasser, H. A., & Oduro, A. D. (2016). Delayed primary school enrolment among boys and girls in Ghana. *International Journal of Educational Development*, 49, 107-114. <https://doi.org/10.1016/j.ijedudev.2015.12.004>
- Shekhar, S., & Xiong, H. (Eds.). (2007). *Encyclopedia of GIS*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-17885-1>
- Sokal, R. R., Oden, N. L., & Thomson, B. A. (1998). Local spatial autocorrelation in biological variables. *Biological Journal of the Linnean Society*, 65(1), 41-62. <https://doi.org/10.1111/j.1095-8312.1998.tb00350.x>
- Tang, K., Li, Z., & He, C. (2023). Spatial distribution pattern and influencing factors of relative poverty in rural China. *Innovation and Green Development*, 2(1), 100030. <https://doi.org/10.1016/j.igd.2022.100030>
- Tovar Obregón, M., & Rios Cataño, C. (2017). Trabajo infantil y deserción escolar en el Perú al 2015. *Apuntes De Ciencia & Sociedad*, 7(1). <https://doi.org/10.18259/acs.2017008>
- Walsemann, K. M., Fisk, C. E., & Dues, A. N. (2021). A spatial analysis of county-level education context and population health and wellbeing. *Wellbeing, Space and Society*, 2, 100002. <https://doi.org/10.1016/j.wss.2020.100002>



**Ciencias  
Sociales**



## De ingeniero fordista a ingeniero digital: Caso de la formación tecnológica UNI en el Perú del siglo XXI

### From fordist engineer to digital engineer: technological training UNI in 21st century Perú

Noemi Guadalupe Lima Fuentes

Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

#### RESUMEN

Cuando se tituló este artículo, se buscó enfatizar con el fordismo uno de los rasgos más característicos en la formación del ingeniero en la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI), que aportó también a los años de mayor desarrollo de la ingeniería en el país. Al mencionar “ingeniero digital” se marca la importancia que debería tener este nuevo paradigma tecnológico en su formación académica actual. Esta institución, en busca de altos estándares académicos, ha logrado acreditar 20 de sus 23 carreras de ingeniería con ABET, de las acreditadoras más prestigiosas a nivel mundial. Se argumenta en este estudio que ello es insuficiente para garantizar este objetivo de calidad; porque es necesario reflexionar primero sobre la exigencia de una revolución en la educación tecnológica, basado en la observación de los países con mejores estándares de calidad y en mejor relación universidad-empresa-estado; lo cual interesa para la formación de ingenieros relevante y eficiente en el país del siglo XXI.

**Palabras clave:** Cambio tecnológico siglo XXI, innovación y desarrollo de los países, enseñanza de la ingeniería.

Recibido: 06/12/2022  
Aceptado: 08/12/2023  
Publicado: 30/12/2023

Correspondencia:  
nlima@uni.edu.pe  
<https://orcid.org/0000-0001-7257-2532>

Licencia:



Revista de la Facultad de  
Ingeniería Económica,  
Ingeniería Estadística y  
Ciencias Sociales de la  
Universidad Nacional de  
Ingeniería

## ABSTRACT

When this article was titled, it to emphasize Fordism, this characteristic feature in engineers training at National University Engineering (UNI), also contributed development's years of engineering in the country. Mentioning "digital engineer" marks the important new technological paradigm in current academic training. This institution has managed to accredit 20 of its 23 engineering programs with ABET, prestigious worldwide accreditors. It is argued in this study that's insufficient enough to guarantee this quality objective; because it is necessary to reflect first on demand for revolution education technological, based on the observation of countries with best quality standards and best university-business-state relationship; that is interesting for relevant training engineers in the country of the 21st century.

**Keywords:** *Technological change 21st century, innovation and development of countries, engineering education.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En el año 2005, un ministro de educación publicó documentos sobre la necesidad urgente de cambios en la universidad peruana. Justificaba entonces esa posición así: "La universidad peruana, de persistir en sus actuales características, no tiene futuro" y más adelante señala: "se considera que aquella situación compromete igualmente al futuro del país, acentuando su debilidad estructural en un contexto global marcado por el predominio del conocimiento especializado como fuente de poder" (Lynch, 2005). Muchas de las soluciones planteadas se plasmaron con posterioridad en la nueva ley universitaria 30220 del 2014 (Ley 30220 de 2014); marco legal que actualmente está siendo modificado por factores políticos que generan un peligroso retroceso en la universidad peruana. En este estudio, se reflexionará sobre la necesidad de ir más allá de lo logrado con la citada ley promover los cambios que cada universidad debe atender según su misión y visión, enfocado en los retos tecnológicos actuales.

Analizar el caso de la Universidad Nacional de Ingeniería es particularmente importante por su naturaleza académica tecnológica y por su implicancia en la formación del ingeniero. Existen dos aspectos importantes: el primero, prestar atención al desarrollo tecnológico poco atendido académicamente en la enseñanza. Y el segundo, que la mayoría de las carreras están muy ligadas con el desarrollo industrial fordista, sistema previo a la revolución digital y al paradigma de la sostenibilidad en desarrollo en el siglo XXI.

Con la reforma universitaria de 1918 iniciada en Argentina, en busca de la autonomía de la institución académica para cumplir su rol de crear conocimientos y formar profesionales calificados que se comprometan con el desarrollo del país, se logró la Autonomía universitaria frente a autoridades políticas o intereses privados que impidan la reflexión neutral que permita el avance cultural. Con los eventos similares que ocurrieron en el Perú se logró parcialmente dicha autonomía: se llegó a un sistema universitario de muy baja calidad que motivó la nueva ley universitaria del 2014, mediante la cual se buscó cumplir con “La necesidad ineludible del trabajo académico de calidad. Trabajo académico que genere un espacio de conocimiento de acuerdo a las necesidades del país y una profesionalización pertinente” (Lynch, 2005). Todo ello se pudo iniciar con la creación de la Superintendencia Nacional de Educación Superior, SUNEDU.

Luego de la decisión tomada por el gobierno de reformar la educación superior, se impusieron procesos de licenciamiento que promovieron procesos de la autoevaluación. En este punto es importante citar lo siguiente respecto a la universidad peruana:

La producción del conocimiento, función esencial de la universidad, se halla totalmente relegada, particularmente en el área estratégica de las ciencias básicas y la tecnología. No hay lineamientos generales, de alcance nacional que coordinen la investigación en las universidades, fijando prioridades y división de funciones al menos entre las universidades públicas. Situación que se repite en cada universidad. Ello da cuenta del aislamiento de la universidad con respecto a su entorno, en particular con las empresas y el Estado; pero es ante todo resultado de la escasa atención puesta por los gobiernos de turno al desarrollo de nuestra base científico tecnológica (Lynch, 2005).

Es en torno a esta realidad de la universidad peruana, que se reflexiona sobre el sistema de la educación superior, con el propósito de aportar en su construcción. En este caso, se enfatizan de las necesidades de actualización tecnológica y los necesarios cambios en la formación en carreras de ingeniería de la UNI.

### **Panorama actual que influye en el rol de las universidades**

Decir que el contexto mundial ha cambiado explica poco, a partir de ahora se debe hablar en términos de velocidad del cambio, por ello lo correcto sería decir que es “cambiante”. Para muchos teóricos es insuficiente que a esta rea-

lidad cambiante se la defina como una etapa más de la historia, puesto que es un momento de cambio radical que está transformando todas las actividades humanas como el hogar, el trabajo, el estudio y el ocio; el cómo las personas se comunican y se socializan hoy.

A partir de los grandes descubrimientos actuales y con herramientas construidas con las nuevas tecnologías de la información se habla de una nueva era: la era digital. Toffler (1980) lo define así:

Las viejas formas de pensar, las viejas fórmulas, dogmas e ideologías, por estimadas o útiles que nos hayan sido en el pasado, no se adecúan ya a los hechos. El mundo que está rápidamente emergiendo del choque de nuevos valores y tecnologías, nuevas relaciones geopolíticas, nuevos estilos de vida y modos de comunicación, exige ideas y analogías, clasificaciones y conceptos completamente nuevos. No podemos encerrar el mundo embrionario de mañana en los cubículos convencionales de ayer. Y tampoco son apropiadas las actitudes o posturas ortodoxas. (p. 5)

Ya desde los 80s, se presentan dos grandes paradigmas que liderarán luego el pensamiento mundial en el siglo XXI, uno es la preocupación por la sostenibilidad del planeta; y el segundo, el nacimiento de la era digital. La importancia del primer paradigma radica en el reconocimiento de que los sistemas de producción y de crecimiento de ciudades continúan dañando al medio ambiente. El segundo, consiste en el abandono de sistemas tecnológicos caducos y obsoletos, superados en efectividad y productividad por herramientas nacidas en la nueva era digital. En este sentido, Toffler (1980) argumenta:

La clave para la comprensión de los años inmediatamente venideros. Es un acontecimiento tan profundo como aquella primera ola de cambio desencadenada hace diez mil años por la invención de la agricultura, o la sísmica segunda ola de cambio disparada por la revolución industrial. Nosotros somos los hijos de la transformación siguiente, la tercera ola.

En la figura N°1 se muestra la tecnología actual empleada para la construcción en la forma tradicional, mientras que comparada con la figura N°2, se automatiza la forma de construir, desapareciendo significativamente el trabajo humano e irrumpiendo las tecnologías de punta con un robot constructor.

**Figura 1.**  
*Ejecución de obra en Perú*



*Nota.* Tomada de Sensor, 2022.

**Figura 2.**  
*Uso de robot en construcción.*



*Nota.* Tomada de Arcus Global, 2022.

Con todo ello se va a reacomodar el liderazgo y poder de los países en el mundo, en función a los niveles de productividad alcanzadas por las tecnologías disponibles.

Se reconoce entonces que cada país ha ido incorporando nuevas tecnologías por la demanda del mercado, lo que ha resultado en disparidades de desarrollo a partir de diferentes niveles de investigación, innovación y desarrollo. Se requiere

saber luego sobre la relación entre cambio tecnológico y competitividad de los países y, todo ello, con el liderazgo de las universidades de esos países.

### La universidad tecnológica en el Perú: caso la UNI

El caso de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) reviste una importancia significativa, ya que ostenta el título de ser la primera institución educativa tecnológica del país, destacándose por su especialización en disciplinas vinculadas a la ciencia y la ingeniería. La creación de la Escuela de Ingenieros, precursora de la UNI, se fundamentó en la creciente demanda de formación en esta especialidad.

El valor añadido de la UNI se manifiesta en su enfoque práctico, un logro que se materializó gracias a la participación activa de ingenieros europeos que habían emigrado con el propósito de llevar a cabo proyectos de envergadura en el país. Este aporte, más orientado al ejercicio profesional que a la mera enseñanza, ha dejado una huella significativa en el desarrollo y la consolidación de la UNI como referente en la formación técnica y científica en la región. A partir de ello se sientan las bases de esta formación profesional.

Las carreras fueron especializándose conforme se alcanzaba un mayor desarrollo industrial-urbano en las ciudades. En los 80s surgen algunos intentos de adecuación a los cambios por parte de la universidad, con la creación de nuevas carreras para la nueva tecnología. En la figura N°3, se muestran las diferentes carreras de ingeniería que creó la UNI por el año de creación.

**Figura 3.**  
Años de creación de las carreras de ingeniería de la UNI



Nota. \*Año aprox. Los documentos difieren en el año oficial. Adaptado de Soria et al., 2012, Fondo Editorial UNI

La identificación del rol de las universidades como la UNI, se expresó en su condición de transmisora de tecnología a través de sus profesionales, contribuyendo así con el desarrollo empresarial, económico y social del país.

Antes, con el desarrollo industrial, se establecieron las formas de producción tipo fordista, es decir de tareas seriadas, repetitivas en grandes centros de producción. Sucedió que en los 80' el gobierno libera la economía, en un contexto en que industria de sustitución de importaciones, estaba desactualizada y con pobre competitividad. Por ello, la participación del sector industrial se redujo, siendo superado por el sector de servicios. Se pierde con ello la relación producción-universidad que se mantenía hasta entonces.

En la actualidad esta relación exitosa empresa-universidad-Estado debe ser replanteada, en términos de adecuación y solución a la actual situación de retraso tecnológico en que se encuentra el Perú. En este escenario, las universidades como el caso de la UNI, ha respondido al crear nuevas carreras de ingeniería (Soria et al., 2012), pero sin una estrategia clara de articulación con los cambios descritos. Según Salazar *“El valor de la innovación requiere que las organizaciones desarrollen capacidades tecnológicas internas y capacidad de conocimiento* (2014).

Se han venido actualizando las currículas de las carreras que se crearon, siempre basadas en las anteriores estructuras académicas, no obstante, incluso las nuevas tienen un inicio curricular a partir de las carreras existentes. Ello se comprueba con los sílabos que mantienen sus contenidos. La desactualización sucede porque falta resolver los contenidos de ciencia dura de naturaleza teórica, frente a las asignaturas aplicativas, que deberían demostrar los cambios principalmente en sus prácticas. Igualmente, al desvincularse directamente de las industrias, la universidad careció de una estrategia para suplir prácticas preprofesionales de gran calidad que tenía antes.

## **2. METODOLOGÍA**

El propósito del presente estudio consiste en abordar la interrogante sobre la conexión entre la economía, la competitividad a nivel nacional y la innovación en universidades a nivel mundial. Este análisis busca respaldar la necesidad de un cambio tecnológico en instituciones académicas similares a la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI).

Para llevar a cabo esta indagación, se realizará un examen detallado de las principales universidades a nivel global y se evaluará la posición económica y competitiva de los países en los que estas instituciones están ubicadas. El enfoque será tratar el estudio como un caso, delineando los requisitos básicos e inmediatos que la UNI debería priorizar al formar ingenieros.

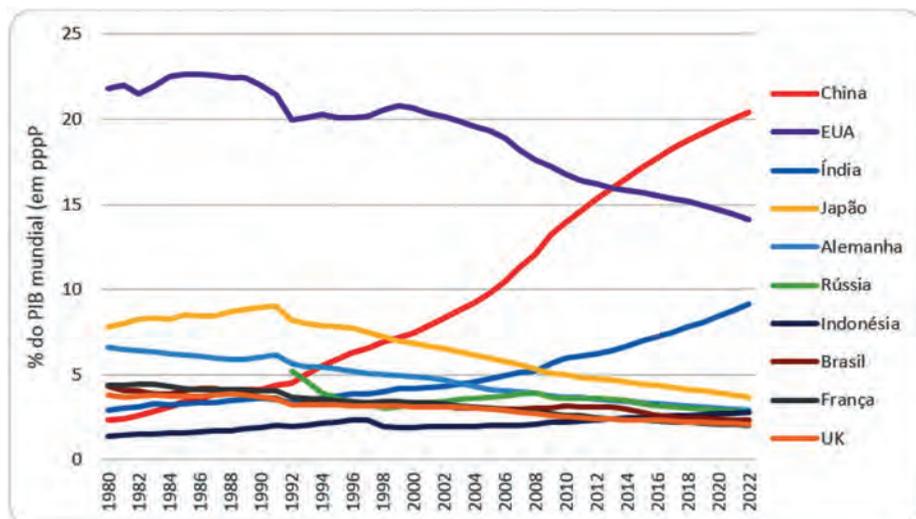
El objetivo adicional es que este análisis sirva como modelo, incentivando a otras universidades a realizar su propio examen, fortalecer su sentido de identidad y avanzar en procesos de actualización. En última instancia, se busca fomentar un contagio positivo que promueva cambios similares en otras instituciones educativas.

### 3. RESULTADOS

Se aprecia en la figura N°4 el crecimiento de las economías en el mundo desde 1980 a 2022.

**Figura 4.**

*Crecimiento de las economías en el mundo 1980-2022*



Nota. Tomado de As dez maiores economías do mundo, adaptado de Diniz, 2017, EcoDebate.

Los datos muestran la relación los niveles de competitividad que han alcanzado y el desarrollo tecnológico de los países. Según el WEF (World Economic Forum), la competitividad se define como “el conjunto de instituciones, políticas y facto-

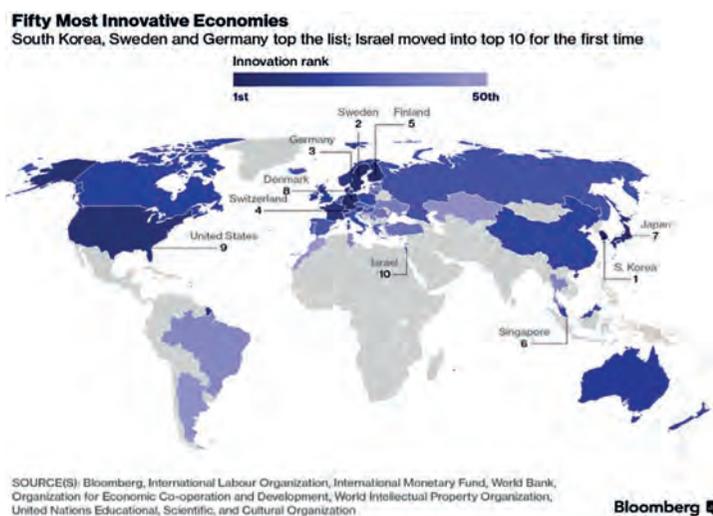
res que determinan el nivel de productividad de un país” (s.f.); a partir de esta definición, se observa que la competitividad influye en el crecimiento de sus economías y, como se vio anteriormente, las nuevas formas de producir automatizadas han aumentado sustancialmente su productividad.

Pezo (2013) relaciona la competitividad y la innovación, señala que actualmente la competitividad, al margen de la innovación y la tecnología, estaría impidiendo el desarrollo productivo, cuando afirma

Las empresas que querían afrontar con éxito la competitividad, necesitaban organizarse en redes de cooperación tecnológica, integrándose en sistemas de producción e innovación estrechamente articulados y concentrados muchas veces en una misma localización, ya que estos propician un intenso intercambio informativo y un rápido aprendizaje tecnológico (Pezo, 2013).

En la figura N°5 se muestra el mapa Grado de innovación por países 2022. Se observa que las economías más importantes del mundo, identificadas con los colores más intensos, lideran la innovación. Asimismo, se puede apreciar la baja o nula presencia, en este campo, de países en vías de desarrollo como el Perú y otros de América del Sur.

**Figura 5.**  
*Mapa grado de innovación países 2022.*



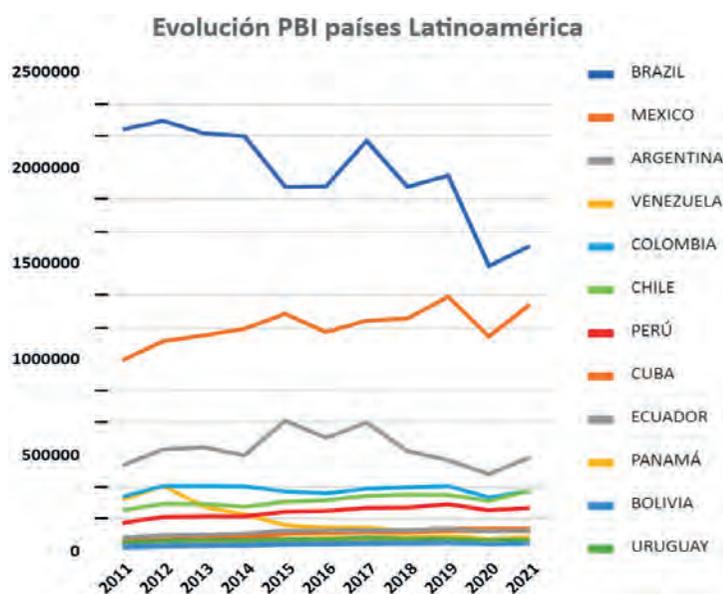
*Nota.* Tomado de These Are the World's Most Innovative Economies, adaptado de Jamrisko y Wei Lu, 2017, Bloomberg markets.

Frente a esta información, es importante destacar que gran parte de la innovación proviene de las universidades, las cuales implementan diversas estrategias de financiamiento y actualización. En las siguientes secciones, se abordará el papel fundamental de las universidades en el proceso innovador. Para una comprensión más completa, se recomienda profundizar en el análisis de las causas subyacentes de retraso y dependencia, especialmente en el caso de Latinoamérica (L.A.), y explorar cómo iniciar de manera estratégica su desarrollo.

En la figura N°6 se muestra el PBI 2011-2021 de los países de Latinoamérica.

**Figura 6.**

*PBI 2011 -2021 países Latinoamérica*



Nota. Información tomada de Banco Mundial, s.f.

Al abordar la competitividad en Latinoamérica desde la perspectiva del desarrollo económico de cada país, se evidencia una marcada disparidad en los niveles del Producto Interno Bruto (PBI) de sus economías. Brasil, situado en la primera posición, representa aproximadamente el 34% del PBI de la región latinoamericana. En conjunto con México, estos dos países ostentan más del 50% del PBI total en la región, alcanzando un significativo 61%. En contraste, hay naciones cuyas economías contribuyen con tan solo el 1% al PBI latinoamericano, subrayando así la brecha económica significativa entre los diversos países de la región y evidenciando el rezago de muchos de ellos. Otro aspecto destacado es la ten-

dencia general al decrecimiento económico, con pocas economías exhibiendo un crecimiento sostenido, incluso antes de la pandemia del 2019.

En este contexto, se procede a analizar las universidades tecnológicas a nivel mundial, las cuales coincidentemente lideran los rankings durante esos años. Para este análisis, se han considerado las 30 instituciones educativas principales en la producción de conocimiento e innovación a nivel global.

En la Tabla N° 1, se muestra a las mejores 30 universidades del mundo y sus países de origen.

**Tabla 1.**  
*Universidades top mundial*

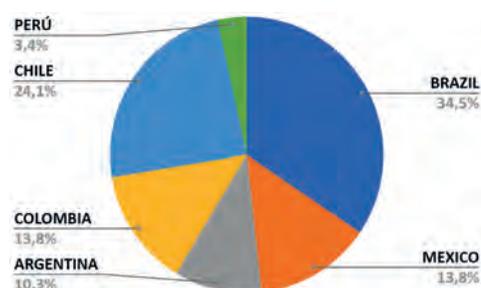
Las 30 mejores universidades del mundo 2022		
N° Orden	Universidad	País
1	Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT)	Estados Unidos
2	Universidad de Cambridge	Reino Unido
3	Universidad Stanford	Estados Unidos
4	Universidad de Oxford	Reino Unido
5	Universidad Harvard	Estados Unidos
6	Instituto de Tecnología de California (Caltech)	Estados Unidos
7	Colegio Imperial de Londres	Reino Unido
8	UCL (Colegio Universitario de Londres)	Reino Unido
9	ETH Zurich (Instituto Federal Suizo de Tecnología)	Suiza
10	Universidad de Chicago	Estados Unidos
11	Universidad Nacional de Singapur (NUS)	Singapur
12	Universidad de Peking	China continental
13	Universidad de Pennsylvania	Estados Unidos
14	Universidad de Tsinghua	China continental
15	Universidad de Edimburgo	Reino Unido
16	Escuela Politécnica Federal de Lausana (EPFL)	Suiza
17	Universidad de Princeton	Estados Unidos
18	Universidad de Yale	Estados Unidos
19	Universidad Tecnológica de Nanyang, Singapur (NTU)	Singapur
20	Universidad de Cornell	Estados Unidos
21	Universidad de Hong Kong (UKU)	RAE de Hong Kong
22	Universidad de Colombia	Estados Unidos
23	Universidad de Tokio	Japón
24	Universidad Johns Hopkins	Estados Unidos
25	Universidad de Michigan-Ann Arbor	Estados Unidos
26	Universidad PSL	Francia
27	Universidad de California, Berkeley (UCB)	Estados Unidos
28	Universidad de Manchester	Reino Unido
29	Universidad Nacional de Seúl	Corea del Sur
30	Universidad Nacional de Australia	Australia

*Nota.* Información tomada de Top Universities, s.f.

Se aprecia que hay una fuerte coincidencia entre los países de economías desarrolladas y el liderazgo académico de sus universidades (el resaltado amarillo destaca las universidades tecnológicas). De la misma forma se observa que aprox. el 50% de ellas presentan explícitamente una orientación tecnológica. Todas de países desarrollados.

En la figura N° 7 siguiente, se grafica la distribución porcentual de las mejores universidades a nivel de Latinoamérica. Se vuelve a repetir esta relación, sólo 6 países están presentes entre las 50 mejores. Hay una presencia de 2 países: Brasil y México. Ambas representan casi el 50% (48.3%).

**Figura 7.**  
*Distribución mejores universidades Latinoamérica 2022*



*Nota.* Sobre la base de las primeras 50 universidades L.A.  
Adaptado de Bloomberg, s.f.

Se aprecia ahora en la tabla N°2 un cuadro comparativo de las universidades según su ubicación en el ranking y país de origen, la ubicación relativa de sus economías por PBI y el grado de innovación en América Latina.

**Tabla 2.**  
*Ranking A.L. \* Universidades vs. Ranking innovación países*

CUADRO COMPARATIVO UNIVERSIDADES Y PAISES (INNOVACIÓN Y TECNOLOGÍA)						
N°	N° Ranking Mundial	Nombre	País	Ranking país	Ranking país	Ranking innovación
				mayor PBI(2022)	Según país L.A. (2022)	
1	72	Universidad de São Paulo USP	BRASIL	1	1	1
2	123	Universidad Nacional Autónoma de México	MEXICO	2	2	2
3	310	Universidad de Chile	CHILE	5	3	3
4	368	Universidad de Buenos Aires	ARGENTINA	3	5	5
5	666	Universidad de los Andes Colombia	COLOMBIA	4	4	4
6	1012	Pontificia Universidad Católica del Perú	PERU	6	6	6
7	1494	Universidad de las Américas Ecuador	ECUADOR	10	10	10
8	1878	Universidad Central de Venezuela	VENEZUELA	9	8	8
9	2009	Universidad de la República	URUGUAY	7	7	7
10	2278	Universidad Mayor de San Andrés	BOLIVIA	12	11	11
11	2321	Universidad de La Habana	CUBA	8	9	9
12	3346	Universidad de Panamá	PANAMA	11	12	12

*Nota.* \* A.L.=América Latin. Información tomada del Fondo Monetario Internacional y Scimago.

Destaca la correspondencia entre países de mayores economías y más innovadoras con las mejores universidades. Pero hay un desfase en Latinoamérica, ya que la primera universidad que aparece está en el puesto 72 del ranking mundial; y en el caso del Perú, la primera universidad aparece en el puesto 1012.

Para referenciar al Perú, se presenta a continuación en la figura N°8 la distribución por regiones de las 22 primeras universidades nacionales. Es notorio que las mejores rankeadas se concentran en la capital, donde se ubican 3/4 de ellas. Hay una escasa presencia de las otras regiones entre las primeras en el ranking de excelencia institucional, como se aprecia en el siguiente gráfico.

**Figura 8.**  
*Distribución mejores universidades Perú 2022*



*Nota.* Sobre la base de las primeras 22 universidades del ranking nacional. Información tomada del Bloomberg.

## Competitividad del Perú y desarrollo de ciencia y tecnología

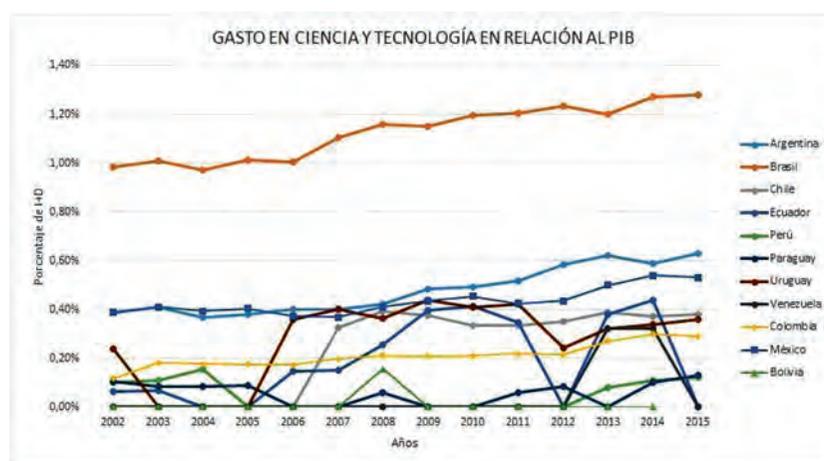
Investigadores peruanos han demostrado su interés en la innovación en el Perú, entre ellos el ingeniero Alfredo Pezo y el ingeniero Francisco Sagasti, ambos académicos. Mientras que el Ing. Pezo opinaba que “Según la WEF, en el corto plazo, un país podría generar bienestar sin invertir en tecnología, pero en el mediano plazo es imposible que pueda lograr crecimiento económico si no cuenta con innovación tecnológica” (Pezo, 2013), el Dr. Sagasti et al. (2012) mencionaba que:

En investigación científica y desarrollo tecnológico (I+D) estamos a la cola de América Latina, dedicándole sólo 0.12% del PBI, y las universidades peruanas no figuran entre las mejores de la región. Los fondos concursables (INCAIRO, FINCYT, FIDECOM) han aumentado la disponibilidad de recursos para ciencia y tecnología, que también recibieron aportes

significativos del canon. Sin embargo, en 2010 el sector público ejecutó sólo S/350 millones, la mitad de lo presupuestado para I+D. La dotación de recursos humanos altamente calificados no ha aumentado apreciablemente, y trabas burocráticas impiden el uso adecuado de los pocos recursos disponibles.

Se observa en la figura. N°9 siguiente los gastos en ciencia y tecnología por países en Latinoamérica en relación al PIB.

**Figura 9.**  
Porcentaje del PBI a Ciencia y Tecnología países 2018



Nota. Porcentaje de I+D como Gasto del PIB. Adaptado de RICYT, 2018.

Se aprecia la dispar contribución de los gobiernos para impulsar su desarrollo tecnológico. Algunos como Brasil lidera muy alejado, seguido por pocos países como Argentina, México y Chile; y con poca presencia se aglomeran los demás países como el Perú. Se comprueba el rezago en inversión en ciencia y tecnología de este país, se demuestra la escasa disponibilidad de recursos asignados para esta tarea; se resta con ello la capacidad competitiva frente a otros países. Al analizar las universidades tecnológicas de países latinoamericanos, la mayoría han seguido los mismos procedimientos frente a la actualización que en Perú. Pero han sido más exitosos en incorporar innovaciones.

De esta primera parte podemos concluir que hay relación entre innovación, crecimiento económico y desarrollo académico en ciencia y tecnología. Se observa a continuación la figura. N° 10, que muestra la ubicación relativa de los países según sus PIBs y su nivel de innovación de sus universidades en A.L.

Figura 10.

Innovación y tecnología Latinoamérica 2022



Nota. Información tomada del Banco mundial y Top universities.

Hay un acompañamiento de la innovación con la posición relativa de la universidad y del país en el entorno latinoamericano, siendo esta relación mejor en unos que en otros.

Se debe reafirmar ahora, la necesidad de la innovación como estrategia de cambio tecnológico. Si se le define se tiene que “la innovación es utilizar el conocimiento para crear productos, servicios o procesos que son nuevos para la empresa, o en su defecto mejorar los que ya existen” (Rivas, 2023). Esta ha sido la causa por la cual las naciones han realizado cambios con lo cual lideran sus universidades y sus economías. Se debe a que se ha adoptado características modernas: ser funcionales y competitivas, se cuenta con sistemas productivos versátiles, pequeños, flexibles, de rápida absorción tecnológica, capaces de modificaciones importantes o drásticas, todo lo contrario a la forma de producción de tipo fordista.

Aún ello, una posibilidad asoma, que se pueda saltar etapas y adecuar los niveles más avanzados a un estratégico sistema de cambio tecnológico nacional. Algunos desarrollos en Perú alientan esta posibilidad, por ejemplo, la sorprendente expansión de la agroindustria.

En la tabla N° 3 siguiente, se presenta un cuadro comparativo entre la posición de las universidades a nivel L.A. y la relativa posición en innovación de las 12 primeras universidades del Perú.

**Tabla 3.**  
Innovación y universidades Perú 2022

CUADRO COMPARATIVO UNIVERSIDADES Y CIUDADES (INNOVACIÓN Y TECNOLOGÍA)						
N° Ranking					Ranking univ. innovación	Ranking top universidades
N°	L.A.	Nombre	Ciudad		(2022)	Perú
1	32	1012 Pontificia Univ. Católica del Perú	Lima		5	1
2	48	1288 Univ. Nacional Mayor de San Marcos	Lima		4	2
3	121	2252 Univ. Nacional de Ingeniería Lima	Lima		15	3
4	132	2334 Univ. Peruana Cayetano Heredia	Lima		2	4
5	147	2540 Universidad de Lima	Lima		14	5
6	182	2790 Univ. Nacional Agraria La Molina	Lima		3	6
7	188	2852 Univ. Peruana de Ciencias Aplicadas	Lima		9	7
8	218	3184 Univ. Científica del Sur	Lima		8	8
9	234	3283 Univ. del Pacífico Perú	Lima		10	9
			Arequip			
10	237	3313 Univ. Nacional de San Agustín de Arequipa	a		12	10
11	302	3958 Univ. San Ignacio de Loyola	Lima		6	11
12	341	4202 Univ. de Piura	Piura		17	12

Nota. Información tomada de Scimago y Top Universities

Al observar lo que pasa en Perú, se nota rezago tecnológico en las universidades. Los mayores impulsos innovativos entonces estarían dadas por las actividades dinámicas en la producción con iniciativa de las empresas peruanas en regiones; y el sector servicios en la capital. Hay escasa relación entre innovación y mejores universidades, lo cual demostraría que aún las instituciones superiores se basan en formas tradicionales de prestigio académico. Así mismo habría poco interés y penetración del factor tecnológico en estas instituciones.

La innovación en el país lo representan en la actualidad las Startups, que se define como sigue. "Un Startup o empresa emergente corresponde a un negocio en su etapa temprana cuyas características lo llevan a ser rápidamente escalable en el mercado con el apoyo de diversas tecnologías" (Orientación Universia, 2020). A su vez, en ellas se combina el uso de tecnologías por emprendimientos universitarios con interés de asociación de empresarios o fondos de inversión. Actualmente esta forma de innovar crece aceleradamente, pero su nivel de escalamiento es pequeño, todo un caso de estudio, por el bajo impacto en generar riqueza. En Perú existen en muchas universidades estas colaboraciones academia-empresa.

Se muestra en la tabla N° 4 siguiente, los Startups por universidades en el país, que se está en etapa de formación y que requiere mejorarse. Existen además otras de ellas fuera de las universidades.

**Tabla 4.**  
Innovación en universidades por Startup

STARTUPS UNIVERSIDADES PERÚ		
Nº	NOMBRE	Nombre STARTUP
1	Universidad Científica del Sur	Startup Científica
2	universidad Continental	Centro de Emprendimiento Continental
3	Universidad de Piura	HUB UDEP: Open Future,SUP,WISE, Babson Collaborative, Innovación abierta, Startup UDEP;
4	Universidad de Lima	Oficina de Emprendimiento de la ULima: Primer paso.
5	Universidad Nacional Mayor de San Marcos	1551 - Incubadora de Empresas Innovadoras
6	Universidad Nacional de Ingeniería	Startup UNI
7	Universidad Nacional San Agustín	JAKU Emprende UNSA.
8	Universidad Nacional Agraria La Molina	Incubagraria.
9	Universidad Nacional Hermilio Valdizán	Dirección de Transferencia e Innovación.
10	Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión	Incubadora de Empresas Faustiniana.
11	Universidad del Pacifico	Emprende UP: Pre Incubación, Incubación, Aceleradora, Red de mentores
12	Universidad Peruana Cayetano Heredia	Bioincuba: Preincubación, Incubación, Pre Aceleración.Fondos de capital semilla, softlanding
13	Pontificia Universidad Católica del Perú	Centro de Innovación y Desarrollo Emprendedor: CREA, CRECE, Taller de habilidades gerenciales, taller de ideas disruptivas para empresas
14	Universidad Católica San Pablo	KAMAN: Pre incubación, incubación, aceleración,
15	Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas	STARTUPC
16	Universidad San Martín de Porres	IPPEU - USMP
17	Universidad San Ignacio de Loyola	CEUSIL: Semana mundial del emprendimiento, ventur day, concurso de ideas de negocios innovadores
18	Universidad de Ingeniería y Tecnología UTEC	UTEC VENTURES: ACCELERATION, CORPORATE

Nota. Información tomada de Orientación Universia, 2020.

El desarrollo de Startups es uno de los indicadores del ritmo de innovación en el nivel superior. Queda pendiente un elemento importante, como es la situación de los laboratorios, tipos y equipamiento que se dispone en cada institución como oferta de infraestructura.

Otro intento de la innovación en las universidades fue al creación de la red Redidi que son:

Las siete universidades más importantes en Ciencia, Tecnología e Innovación de Perú, conforman RED IDi, para vincular y articular la oferta de ciencia y tecnología, investigadores y científicos con el sector empresarial y gubernamental, otorgando valor agregado mediante investigación, desarrollo e innovación a través de soluciones reales en sectores productivos globales. (2022)

Actualmente su actividad es de bajo impacto, se dedica más a la difusión de bibliografía y concursos de innovación aislados. Esto se explicaría porque se requiere una convergencia de otros actores que compartan el beneficio de la innovación en tecnología, como lo señala otras experiencias de mayor desarrollo como es México:

La I+D+i no puede existir sin la obligada sinergia de varios sectores, que necesitan dar su mano para progresar juntos hacia un proyecto común: las empresas, piezas clave del sistema productivo; las universidades, la cocina por excelencia del talento y la piedra angular de todo el proceso; la Administración, sirviéndose de sus entidades públicas para dar apoyo y refuerzo a la innovación; así como diversas organizaciones e instituciones de índole privada que fomentan la calidad y la excelencia de la cadena que conforma la I+D+i. (CEREM, 2022)

La teoría sustenta esta búsqueda de sinergia que active la innovación de forma significativa como lo menciona Kuhn y el concepto de paradigma. “El concepto de paradigma. Lo definió como el sistema de creencias compartidas por la comunidad científica, los valores comunes, las formas como las operan” (2019). Señala Kuhn que debe haber “Recursos y orientación (AAPP), conocimientos desarrollados (Universidad) y Estrategias concretas de aplicación (Empresas)”.

Finalmente, se debe replantear el rol de la universidad en crear conocimiento, ya que el énfasis actual se enfoca en la formación profesional frente a la investigación. Resulta que en la actualidad el conocimiento se gestiona, es decir la utilización; y está considerado como un activo de las universidades:

La práctica de explotación de nuevas tecnologías se ha venido caracterizando por medio de los sistemas nacionales de innovación que no son otra cosa que una red de entidades sociales públicas, privadas y mixtas, cuyas actividades e interacciones contribuyen a la obtención, generación, aplicación, apropiación, difusión y explotación de conocimiento económicamente útil. (Fuentes Morales, 2010)

## 4. DISCUSIÓN

A partir de este estudio, se reafirma el rol preponderante de la tecnología, mediante la innovación, desarrollos e investigación en el presente siglo.

Según los especialistas, los países de economías pequeñas que nunca alcanzaron el desarrollo industrial esperado y que conviven con formas de producción primaria extractivas y agrícolas, pueden ingresar a este cambio tecnológico. El éxito se basaría en armonizar desarrollos locales con una dosis adecuada de innovación.

Algunos ejemplos lo demuestran. El actual crecimiento agroindustrial peruano, según la SNI (Sociedad Nacional de Industrias, 2023) de Perú, la agroexportación entre 1979 y 2019 ha crecido 83,5 veces. Ello dice que es posible alcanzar el progreso deseable y que las universidades tienen un rol central en encontrar esa fórmula.

Otro factor para observar es el alto grado de concentración del poder económico y científico en el mundo, tema muy importante que atender por el papel estratégico de la tecnología en el siglo XXI.

Existen teóricos que destacan el posible dominio mundial de los dueños de las nuevas tecnologías, incluso es motivo de estudios especializados como lo señaló el autor que afirmó lo siguiente:

Gran parte de lo que ahora llamamos “ciencia avanzada” fue desarrollada por científicos de países ricos para resolver los problemas de los países ricos. Muy poca investigación se ha encaminado a tratar los problemas cotidianos de los pobres del mundo. No obstante, cualquier “política de desarrollo” que comience cegándose a las potencialidades del conocimiento científico y tecnológico avanzado, condena a cientos de millones de desesperados, hambrientos y esforzados campesinos a una perpetua degradación. (Toffler, 1980)

Por ello hay que interesarse en las características de esta adopción, si ello es bueno o malo al país, si es accesible, posible, pertinente.

### **Cambio tecnológico.**

Se sabe que el conocimiento está en un proceso de producción continua y en acelerada transformación. Actualmente la disponibilidad de información en re-

des que da la informática, pone a disposición del hombre conocimientos como nunca en la historia. Esa misma velocidad crea una necesidad impostergable de cambio. Por otro lado, como se señaló anteriormente, las ingenierías crecieron con mayor éxito en el siglo XX. Fueron protagonistas del desarrollo industrial y de infraestructura, apoyaron el crecimiento de ciudades al facilitar las múltiples funciones que realizan (Soria et al., 2012). Se puede sintetizar, que fueron eficientes en un tiempo y espacio físico delimitado. Pero hoy ello se ha alterado con nuevos paradigmas.

El avance científico ha permitido la aparición de la virtualidad. Las sociedades se liberaron del tiempo y el lugar que limitaban la comunicación y demás actividades humanas. Hoy los tiempos son móviles y/o simultáneos, de diferentes velocidades; y los tipos de espacio ha variado, se habla entonces de “tiempo real” y “espacio virtual” respectivamente. Junto con eso, se avanzó a su vez en la automatización de las actividades humanas a partir de la microelectrónica que creó el chip y con ello la incorporación de inteligencia en las máquinas y los objetos. Aparece entonces un término que se basa en la inteligencia artificial, y que describe muchos de los inventos e innovaciones tecnológicas: los sistemas inteligentes. Se trastoca la forma de producir en las fábricas y manufactura. La disrupción acuñó un nuevo término “industria 4.0” y en el campo de la sostenibilidad “la economía circular”.

Como se comentó antes, a finales del siglo XX, surge a su vez una reflexión importante sobre los daños al planeta, y la necesidad de la búsqueda de su preservación. Se desarrolló la investigación científica para tecnologías más limpias, sobre todo en los procesos productivos y la vida en las ciudades. Con información abundante en calidad y cantidad, se estudió muchos campos, entre ellos, formas de producción menos invasivas, tipos de energía más eficientes, preservación de ecosistemas y de recursos naturales referidos a animales y plantas; que dio paso a descubrimientos de alta complejidad, gracias al desarrollo de la biomedicina y la genética.

El papel del trabajador en el sistema de producción ha variado también. Muchas funciones humanas se han automatizado, las jornadas y división de los trabajos se han relativizado. Ya se hablaba del trabajo virtual cuando emergió la pandemia del 2019, aplicándose luego masivamente a nivel global dada la contingencia.

Así mismo, se debe mencionar la globalización actual de la sociedad y la economía. Debido a la ruptura de las fronteras del tiempo y el espacio, se puede realizar actividades entre personas en cualquier parte del mundo. Se puede afirmar

que se coexiste con un mundo paralelo al real a través del internet, se intercambian bienes y servicios, se socializa, se crean redes de aprendizaje, actividades de grupos sociales, incluso actividades negativas ligadas al crimen y a grupos de fanatismo religioso y político.

Ello va ganando un mayor espacio en la cultura, se deja de lado las actividades tradicionales y se posterga a la generación anterior del desarrollo digital. Un visionario Toffler adelantado a sus tiempos citaba en su libro lo siguiente “Los analfabetos del siglo XXI no serán aquellos que no sepan leer y escribir, sino aquellos que no sepan aprender, desaprender y reaprender” (Toffer, 1980). Esta generación que nace con este entorno se identifica como los millennials, que son personas nacidas entre los 80 y 2000 viviendo en ambientes digitales.

### **Reflexiones respecto al nuevo ingeniero digital**

En primer lugar, hay que reflexionar sobre qué tecnologías tiene hoy vialidad en la producción y el contexto peruano, cuales deben ser superadas, cuales adecuadas y cuales finalmente cambiadas o desechadas; que replique en cambios directos y se relacione con las especialidades de la UNI.

Otro aspecto central consiste en determinar qué nivel de conocimiento científico apoyará esta nueva tecnología. Es decir, cuánta y cuál ciencia aplicada se requerirá. Para ello se debe aprovechar las facilidades de la informática, se debe buscar igualmente el intercambio académico y las redes que conviene pertenecer o desarrollar. Se debe comentar la experiencia exitosa del Instituto de Diseño e Innovación Tecnológica (Idit) de la Universidad Iberoamericana Puebla, México; que se planteó las preguntas “*¿El equipamiento, conocimiento y la innovación del Idit, a servicio de quién tiene que estar? ¿qué sería congruente y pertinente?, ¿cómo puede la innovación, el diseño y la tecnología favorecer al emprendimiento en situación vulnerable?*” (Irigoyen, 2016).

Es necesario saber con este contexto, con qué laboratorios se cuenta, cuáles deben ser transformados y cuales definitivamente abandonados. Así mismo, mejorar significativamente nuestra infraestructura de investigación y exploración de soluciones adecuadas a una universidad peruana. Valorar las instalaciones modernas. Actualmente se cuenta con un Fab Lab (término acuñado en el MIT el 2009) y otros laboratorios de última generación. Como prioridad, se necesita contar con comunicación digital en todo el campus, en una estrategia que permita el continuo mantenimiento y actualización. La inversión en computadoras es relativamente baja, se debe obtener bibliotecas totalmente digitalizadas.

Se necesita observar entre los docentes y estudiantes los recursos humanos e inteligencia disponibles, los niveles de actualización necesarios y el tipo de capacitación para ello. Según el modelo design thinking, las habilidades del profesional a futuro son: Creatividad, trabajo en equipo y resolución de problemas. Interesa ahora medir más el conocimiento aplicado que el adquirido.

Un nuevo lenguaje se debe incorporar al aprendizaje, tales como desarrolladores, innovaciones, medios digitales, redes científicas, conectividad, tiempo real, soluciones híbridas, redes de interés, soluciones globales, gestión tecnológica, etc. Y para nuevas formas de aprendizaje: plataformas educativas y de trabajo, aulas virtuales, simuladores.

Se debe evolucionar a un nuevo perfil de egresado que recoja una propuesta curricular para tiempos cambiantes. El éxito estará en hallar la combinación exacta entre investigación, tecnología y mercado a atender, y que se materialice en la visión y misión de la carrera. Más que objetivos generales señalar los específicos, para que permita medir los niveles de avance, que se basa en procesos de mejora continua.

## 5. CONCLUSIONES

Actualmente la UNI ha alcanzado una segunda acreditación ABET en 20 carreras. Sería insuficiente para garantizar el propósito de calidad, en un contexto como el descrito en este estudio.

Se evidencia así mismo, que los países de mayor crecimiento económico, son los que han realizado mayor innovación y lo han escalado, que se dio con el acompañamiento del liderazgo de sus universidades en el campo tecnológico. Y a su vez, se ha mostrado que los países de la parte Sur del mundo, presentan atraso tecnológico y escaso crecimiento de sus economías. Junto a ello, el bajo avance tecnológico de sus universidades.

Además, se encontró necesario restablecer la relación del profesional con la transmisión tecnológica que se tenía antes de manera implícita. El estudiante debe ser preparado para un medio que requiere una dosis de tecnología de punta, de uso de sus recursos nativos y de inserción en el mercado mundial; que aporte con ello a orientar los cambios en el campo industrial que requiere el país.

Se ve importante un cambio trascendente en la formación en carreras de ingeniería, cuyas características se describen como: pertinente y sostenible, interconectada y sistémica, con manejo complejo de información y de la realidad, con responsabilidad social, insertada, que maneje los medios digitales adecuados. Que se reconstruya la relación universidad-empresa-gobierno de nuevo tipo.

Con todo ello, apenas se estará en capacidad de vislumbrar el camino que permita cruzar a la innovación y tecnología; y se entienda cómo otras universidades líderes en el mundo, además de hablar de nuevas tecnologías como el internet de las cosas, Smart Cities, robots de fabricación, big data, sistema de seguridad y negocios en red, realidad aumentada, inteligencia artificial, tecnologías limpias, etc., se pueda en las universidades como la UNI, producir y controlar estas tecnologías en el siglo XXI.

## 6. REFERENCIAS

- Arcus Global. (2022). *Arcus Global*. Recuperado de <https://www.arcus-global.com/wp/>
- Banco Mundial. (s.f.). *Datos de libre acceso del Banco Mundial*.  
<https://datos.bancomundial.org/>
- Bloomberg. (s.f.). *Bloomberg Línea*.  
<https://www.bloomberglinea.com/latinoamerica/peru/>
- CEREM. (5 de septiembre de 2022). *¿Qué supone la I+D+I en una organización empresarial?*. Recuperado de <https://www.cerem.pe/blog/que-supone-la-i-d-i-en-una-organizacion-empresarial>
- Diniz, A. J. (2017). As dez maiores economias do mundo. *EcoDebate*.  
<https://www.ecodebate.com.br/2017/07/07/as-dez-maiores-economias-do-mundo-artigo-de-jose-eustaquio-diniz-alves/>
- Fondo Monetario Internacional. (s.f.). *Fondo Monetario Internacional*.  
<https://www.imf.org/es/Home>
- Fuentes Morales, B. A. (2010). *La gestión de conocimiento en las relaciones académico-empresariales. Un nuevo enfoque para analizar el impacto del conocimiento académico*. [Tesis para optar el grado de Doctor]. Universitat Politècnica de València. Departament d'Organització d'Empreses.  
<https://doi.org/10.4995/Thesis/10251/8334>
- Irigoyen, E. M. (2016). Economía social+ innovación tecnológica: experiencias de éxito en entornos de precariedad. *Journal of technology management & innovation*, 11(1), 86-92. <https://doi.org/10.4067/S0718-27242016000100012>
- Jamrisko, M., & Lu, W. (2017). These are the world's most innovative economies. *Bloomberg Markets*. <https://www.bloomberg.com/news/articles/2016-01-19/these-are-the-world-s-most-innovative-economies#xj4y7vzkg>
- Kuhn, T. S. (2019). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de cultura económica.
- Ley 30220 de 2014. Ley Universitaria. 9 de julio de 2014. D.O. No. 527213.
- Lynch, N. (2005). *La segunda reforma universitaria (Vol. 5)*. Ministerio de Educación.
- Orientación Universia. (23 de junio de 2020). Startups: *¿Qué instituciones privadas promueven y financian proyectos de Innovación?*  
<https://orientacion.universia.edu.pe/infodetail/orientacion/consejos/star->

tups-que-instituciones-privadas-promueven-y-financian-proyectos-de-innovacion-5990.html

Pezo P., A. (2013). *Innovación: reto, posibilidad y esperanza “Manual I+C: para el innovador tecnológico y social*. Fondo Editorial UNI

Redidi. (2022). *Investigación, Desarrollo e Innovación*. Recuperado <https://redidi.org.pe/>

Rivas, J. (2023). *Innovación tecnológica: qué es, sus tipos y sus beneficios*. Tecnológico de Monterrey.  
<https://blog.maestriasydiplomados.tec.mx/innovacion-tecnologica-que-es-sus-tipos-y-sus-beneficios>

RYCYT. (2018). *Red de indicadores de ciencia y tecnología. Interamericana e Iberoamericana*. Recuperado de: <http://www.ricyt.org/category/indicadores/>

Sagasti, F., Gonzales E. O., E. G., Castelo, V., Guerrero, J. & Marticorena, B. (2012). *La tercera revolución industrial y el Perú*. Editorial PUCP.  
<https://departamento.pucp.edu.pe/economia/libro/la-tercera-revolucion-industrial-en-el-peru/>

Salazar, F., Cavazos, J., Poch, J., & Santos, F. (2014). Cognición de la innovación industrial en América Latina: Avances y desafíos. *Journal of technology management & innovation*, 9(1), 148-157.  
<http://dx.doi.org/10.4067/S0718-27242014000100012>

Scimago. (s.f.). *Institutions and University Rankings*. <https://www.scimagoir.com>

Sensor (2022). *Sensor S.R.L*. Recuperado de [www.sensor.pe](http://www.sensor.pe)

Sociedad Nacional de Industrias. (2023). *La agroindustria en el Perú* [Archivo PDF].  
<https://sni.org.pe/wp-content/uploads/2022/03/Agroindustria.pdf>

Soria, J. I. L., Tsuboyama, A. M. U., & Tinoco, L. Q. (2012). *Historia de la UNI*. Fondo Editorial UNI

Toffler, A. (1980). *La tercera ola*. Plaza & Janes

Top Universities. (s.f.). *QS World University Rankings 2022*. Recuperado de:  
<https://www.topuniversities.com/>

World Economic Forum. (s.f.). *Metadata Glossary*.  
<https://databank.worldbank.org/metadataglossary/africa-development-indicators/series/GCI.INDEX.XQ>

## Plan estratégico disruptivo de innovación para una Universidad usando la “Casa de la Calidad”

### Disruptive strategic innovation plan for a University using the house of quality

Edgardo Martín Figueroa Donayre

Universidad Nacional de Juliaca, Puno, Perú

#### RESUMEN

Un plan estratégico para la innovación es una herramienta imprescindible para cualquier institución académica.

El presente plan estratégico disruptivo de innovación maximiza el valor y beneficios para las instituciones públicas y privadas usando el marco lógico y la Casa de la Calidad. Con el marco lógico de actuación se tienen claros los datos de entrada para la planificación; el resto de actividades correspondientes a la Casa de la Calidad (diseño de producto, diseño de proceso y control de proceso), es directo. La Casa de la Calidad es la técnica más efectiva para entender y hasta cuantificar el valor de las propuestas. Además, aplicado a una universidad, asegura la obtención de fondos (dinero) que soporten e impulsen el desarrollo de la innovación al priorizar la voz del cliente (Innovate).

**Palabras clave:** Marco lógico, QFD, Innovación disruptiva, Procesos, Empresas.

Recibido: 19/10/2023  
Aceptado: 08/12/2023  
Publicado: 30/12/2023

Correspondencia:  
[em.figueroa@unaj.edu.pe](mailto:em.figueroa@unaj.edu.pe)  
<https://orcid.org/0000-0001-7891-3334>

Licencia:



Revista de la Facultad de  
Ingeniería Económica,  
Ingeniería Estadística y  
Ciencias Sociales de la  
Universidad Nacional de  
Ingeniería

## ABSTRACT

A strategic plan for innovation is an essential tool for any academic institution. This disruptive strategic plan for innovation maximizes the value and benefits for public and private institutions using the logical framework and the house of quality. With the logical framework of action, the input data for planning is clear, the rest of the activities of the house of quality (product design, process design and process control) are direct. The house of quality is the most effective technique to understand and even quantify the value of proposals. In addition, applied to a university, it ensures the obtaining of funds (money) that support and promote the development of innovation by prioritizing the voice of the customer (Innovate).

**Keywords:** *Logical framework, QFD Disruptive innovation, process, Enterprise.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, el Perú está muy relegado en investigación científica, desarrollo y aplicación de la ciencia y tecnología, comparado con otros países. Según Vela Meléndez et al. (2018), existe un reducido e insuficiente número de investigadores, así como escaso recurso económico disponible para la ciencia tecnología e innovación (CTI).

En ese contexto, un plan estratégico de innovación constituye una herramienta clave, imprescindible, en cualquier institución académica y de investigación que busca maximizar sus opciones de innovación. Obviamente, el mayor recurso para la innovación en el Perú viene del Estado y, por tanto, las universidades deben estar alineados con los requerimientos de país. En el Perú, la institución encargada de ese rol es Innóvate Perú. Por este motivo, es necesario justificar de manera lógica (Lu-Chang-Say et al., 2018; Aldunate & Córdoba, 2011) el propósito dado, los escasos recursos y alinear los esfuerzos con la finalidad de impulsar las actividades de innovación en línea con los requerimientos de los organismos financiadores. Afortunadamente, existen herramientas robustas que permiten alinearse con las necesidades o requerimientos del cliente. Una de estas herramientas es la Casa de la Calidad. Por tanto, es importante saber que se ha avanzado con respecto a planes estratégicos usando la Casa de la Calidad (QFD en sus siglas en inglés).

Los beneficios de gestionar una institución educativa con un plan estratégico de investigación/innovación son claves. Sin embargo, se sabe poco de la ven-

taja de usar un QFD en un plan estratégico institucional (PEI). Hunt y Xavier (2003), quién ha investigado la aplicación del QFD a la planeación estratégica de las organizaciones, señala que el poder de las técnicas del QFD residen en que el QFD ayuda a identificar lo que es importante, al proveer un sistema lógico para reemplazar la **toma de decisiones basada en emociones** (Hunt & Xavier, 2003). QFD utiliza un método gráfico en el que se expresan relaciones entre deseos de los clientes y las características de diseño. Es una matriz que enlista las necesidades de los clientes ¿Qué? o “atributos” comparándolas con las “propuesta o características de diseño” ¿Cómo? (Arboleada Valencia et al., 2019).

Las expectativas y necesidades de los clientes son recolectadas mediante técnicas de investigación de mercados: entrevistas, encuestas, exposiciones, etc. Mediante la Casa de la Calidad se organizan los datos obtenidos. El uso de matrices es la clave para poder construir la Casa de la Calidad (valor). En la matriz se muestran las relaciones entre las necesidades de los consumidores y las propuestas de diseño (Duhovnik, 2006).

Chen y Bullington (1993) adopto la Casa de la Calidad y realizo propuestas generales en cada una de las cuatro fases.

Rianmora y Werawatganon (2021) llevaron a cabo un análisis para identificar los requisitos de los clientes y las expectativas de atributos de ingeniería para un producto innovador utilizando el modelo de Kano y el análisis QFD. Dinçer et al. (2019) evaluaron el rendimiento de las políticas europeas de inversión energética utilizando un enfoque integrado de medición de calidad multidimensional (QMA). Emplearon QFD dentro del método de cuadro de mando integral (BSM) para medir dimensiones como requisitos de clientes y técnicos, diseño de procesos y rendimiento.

Habib et al. (2021) destacaron QFD como una herramienta de gestión que traduce las necesidades de los clientes en soluciones técnicas. Hicieron hincapié en sus aplicaciones para reducir costos, mejorar el diseño, mejorar la calidad de productos/servicios, reducir el tiempo de ciclo de producción y cumplir con las expectativas de los clientes.

Tang et al. (2022) identificaron las habilidades profesionales necesarias para los profesionales de la robótica y utilizaron QFD para diseñar un curso de formación para robots industriales en escuelas vocacionales. Su investigación proporcionó información sobre la industria ocupacional y la composición del curso, beneficiando a los tomadores de decisiones.

Gunasekaran et al. (2019) enfatizaron la Gestión de Calidad (QM) como un tema de investigación crucial en el mundo actual, especialmente en el contexto de la Industria 4.0. Aunque no emplearon directamente QFD, su trabajo sugiere su potencial para mejorar los planes estratégicos dentro de QM.

Una revisión detallada de la bibliografía muestra una pobre aplicación de la Casa de la Calidad en un PEI útil para los institutos de investigación y la academia, particularmente en el Perú no se ha identificado ninguna publicada en una revista de rigor.

Por último, se puede mencionar que el estado del arte en esta dirección es limitado, he ahí la importancia de este trabajo.

En este paper se propone un método para desarrollar el plan estratégico de innovación basado en la Casa de la Calidad y alimentado con un marco lógico sólido que aborda la problemática y el propósito y permite una entrada sólida a los cuatro fases de la calidad.

## **2. METODOLOGÍA DEL PEI BASADO EN LA CASA DE LA CALIDAD Y EL MARCO LÓGICO.**

La elaboración del Plan Estratégico Disruptivo partió por entender la voz del cliente (Innovate) y a través de un proceso de planeación, diseño, seguimiento y control se obtuvo con un conjunto de tareas, responsables e indicadores claves de éxito (KPIs). Por lo tanto, las posibilidades de poder obtener fondos concursables que soporten e impulsan el desarrollo tecnológico y la aplicación tecnológica en un centro de investigación científica es muy alta.

La formulación del PEI, comienza por definir el Marco Lógico (ML) en sus dos ejes fundamentales y concisos, el problema y el propósito, con la finalidad de definir un cliente y sus requerimientos. La Casa de la Calidad resulta mucho más efectiva en la etapa de planificación, diseño, proceso y control de objetivos, acciones e indicadores de medición de resultados. Finalmente, es necesario y fundamental la generación de políticas. La Casa de la Calidad permite, analiza y evalúa sistemáticamente, todos los ¿Qué? de los requerimientos, además, las propuestas de ¿Cómo? serán las alternativas técnicas de respuesta, para tomar las decisiones estratégicas apropiadas a adoptar y planificar. El objetivo es maximizar el plan estratégico basado en la voz del cliente.

Cabe señalar que, la decisión de las acciones adoptadas y su disposición, define la estrategia, para el logro de determinado resultado deseado.

Como parte de esta nueva visión y en respuesta a las necesidades actuales, se presenta el **PEDC** (**Plan Estratégico Disruptivo** basado en la Casa de la Calidad) para instituciones académicas como universidades con un ML que Maximiza la caza del valor superior de beneficios para todos, deberá ser un documento de referencia, que debe ser revisado, periódicamente cada cinco (05) años, con la finalidad de ajustarse a los cambios a las situaciones de la realidad.

**El PEDC** puede responder preguntas como: ¿cuáles son los propósitos de una organización?, ¿qué se espera del futuro en cuanto a innovación se refiere?, ¿Qué debilidades se debe fortalecer con el objetivo de captar fondos?, ¿Qué tipo de servicio, producto o startup se debe enfocar las líneas de investigación, para maximizar los beneficios de innovar?, ¿cuáles serán las oportunidades o peligros que se tienen que afrontar en los próximos años y que se debe explorar o evitar respectivamente?, entre otros.

Por este motivo, teniendo en cuenta que toda institución educativa desea que sus investigadores reflejen sus principios fundadores de una manera que tenga impacto positivo para el mundo de hoy, se ha desarrollado un mecanismo que entrelaza la investigación, con las necesidades y solicitudes de todos los impactados por el **PEDC**, así se elevará el nivel de educación y la competitividad al nivel superior para beneficio de todos.

El plan estratégico de innovación basado en la Casa de la Calidad adecúa a los centros de investigación a un nuevo contexto, con nuevas exigencias de investigación, para desarrollar innovaciones, en beneficio de las personas en la sociedad. Para ello se debe crear, adaptar y aplicar nuevas líneas de investigación, incorporando criterios como los descritos por Lu-Chang-Say et al. (2018). Así mismo, las diversas propuestas de alternativas técnicas, que se adopten del QFD, como parte del proceso de la planificación estratégica, definen objetivos y acciones estratégicas a ejecutar. Definen Indicadores de Hito y de Resultados Imprescindibles, y KPI's, para seguimiento y evaluación de los logros.

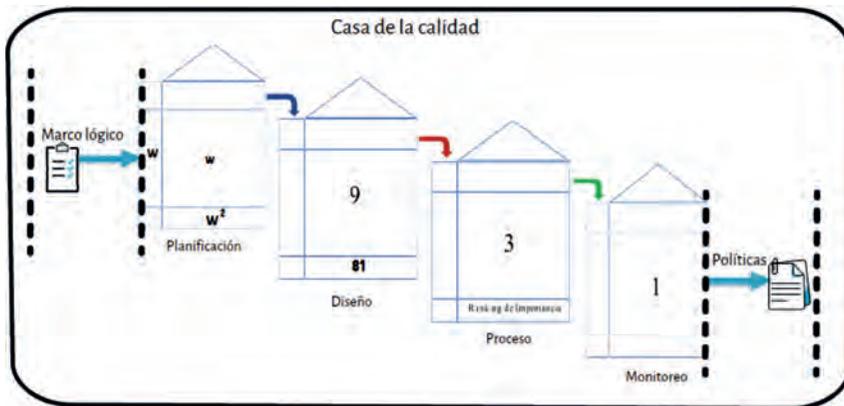
Sin embargo, para definir y diseñar estrategias, objetivos y acciones, previamente se debe cuantificar, evaluar, hasta entender las necesidades y el valor de cada propuesta, para definir los propósitos y escenarios o situación deseada como resultado. El procedimiento general desarrolla 4 fases como se muestra en la Figura 1 y en él se puede identificar un conjunto de fases.

**Fase 1.** Diseño de servicio: La primera parte del QFD se le conoce también como la Casa de la Calidad, la usa el departamento de Marketing de una organización u empresa. Su enfoque se basa en el diseño de manera general de un

servicio, relacionando los atributos que pide un cliente con el producto y como consecuencia se obtiene las especificaciones de un determinado diseño. Cabe señalar como se ha definido en los conceptos clave, más que implementar los deseos del cliente, en los productos es implementar las características de diseños, que son de valor superior, en los productos y servicios.

**Figura 1.**

*La casa de la calidad en planeamiento estratégico de innovación (PEDC).*



**Fase 2.** Diseño en detalle: En la segunda parte se correlaciona y evalúa las especificaciones del diseño con diferentes características de los componentes del producto y como resultado se obtienen convenientes especificaciones para estas.

**Fase 3.** Proceso: En la tercera parte se da una nueva correlación esta vez entre las especificaciones de los componentes con las características del proceso de producción teniendo como resultado las especificaciones de este último.

Fase 4. Producción: La última parte correlaciona cada especificación de proceso con cada característica de producción y como resultado se obtiene las más apropiadas especificaciones para esta.

### 3. PEDC PARA UNA UNIVERSIDAD Y LA VOZ DEL CLIENTE (INNÓVATE PERÚ)

La universidad objeto de estudio es una casa de estudios sin fines de lucro ubicada en el interior del Perú. La necesidad de licenciamiento ante SUNEDU, obligó a esta casa de estudios a reestructurar dramáticamente su orientación hacia la innovación. Consecuentemente, fue necesario realizar un plan estra-

tégico de innovación. Como el ente rector de la innovación el Perú es Innóvate Perú, el PEDC buscó siempre cumplir con todos sus requerimientos para así maximizar la casa de valor.

Como complemento, es importante tener en cuenta que el Programa Innóvate Perú cofinancia proyectos de innovación y emprendimiento para incrementar la competitividad y productividad empresarial, proyectos de investigación, desarrollo, innovación y emprendimiento (I+D+I+E) en diversas regiones del país buscando contribuir al crecimiento de la productividad empresarial a través de un aumento de los niveles de competitividad y de innovación.

Se utilizó la metodología QFD en la identificación y rastreo de las necesidades y Problemáticas de todos los que impacta el PEI, para en el ML finalmente definir el Objetivo General, los Objetivos Estratégicos Generales, de los cuatro actores y sus respectivos Objetivos Estratégico Específico, para cada uno de los siguientes actores clave: Academia, Estado, Empresas y Personas. Así mismo se definió los Objetivos Estratégicos Generales. Así como los Objetivos Estratégicos Específicos.

Se dejó la pregunta abierta, para definir las Acciones Estratégicas Específicas, para cada uno de los Objetivos Estratégicos Específicos.

Cabe señalar que todo Objetivos, lleva lograr resultados estratégicos imprescindibles (claves) de ser alcanzadas para llegar al Fin. Mientras que las acciones estratégicas, son indispensables (criticas) en su realización, de no ser alcanzados, los resultados serán catastróficos.

### **Requerimientos de Innóvate Perú**

La casa de estudios cuenta con 11 líneas de investigación de posgrado y 33 de pregrado (Resolución de Consejo Universitario N° 0509-2017-UTEA-CU, 2017), de las cuales no presenta sustento suficiente para aplicar a fondos concursales de Innóvate Perú. Los requisitos y criterios de selección de los concursos de Innóvate Perú están orientadas a brindar soluciones innovadoras que causen impactos al producto, servicio o proceso. Por ello luego de varias reuniones y utilizando la metodología QFD, se diseñó un plan estratégico integral en un diagrama de flujo basado según las necesidades de la casa de estudio (*ver Figura 2*).

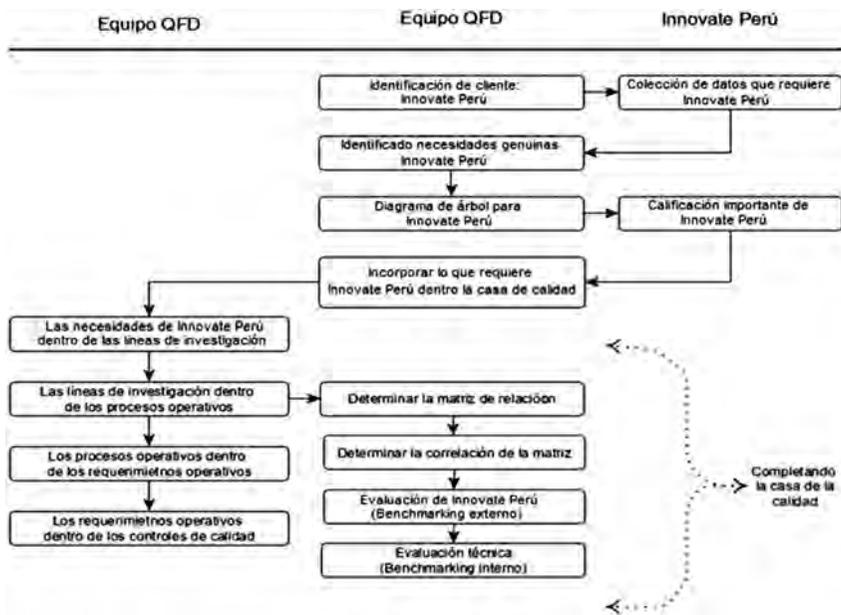
Adicionalmente, como se sabe, brindar soluciones innovadoras implica la obtención de nuevos productos, servicios, proceso u métodos de organización, por tanto, la institución educativa no debería desgastar más sus recursos en

líneas de investigación, que no tenga valor ni beneficios en la sociedad, estén o no alineadas a los requerimientos de Innóvate Perú. Se sugiere también que Innóvate priorice sus recursos identificando los requerimientos del escenario empresarial peruano basado en el QFD.

En la página web de Innóvate Perú, se muestra en resumen los requerimientos prioritarios del cliente, tanto como en áreas de conocimiento como sectores prioritarios de desarrollo, para mayor información ver página web (Innóvate Perú, 2021).

**Figura 2.**

Diagrama de flujo que representa los pasos a realizar en la metodología QFD



#### 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Sobre la base del Eje Estratégico Institucional, se establecen las siguientes estrategias de emprendimiento en los centros de investigación de cada unidad de emprendimiento de la casa de estudios (ver Tabla 1). Caber señalar que cada acción estratégica específica se relaciona con los objetivos estratégicos específicos, para los campos: Personas, Planeta, Procesos y Productos. La figura 3 muestra una de las matrices QFD para Innóvate Perú diseñadas en el contexto del presente artículo científico.



**Tabla 1.**  
Eje de objetivos estratégicos específicos del plan estratégico de investigación (PEI)

Objetivos estratégicos de emprendimiento, para Lograr la excelencia en Innovación	
Objetivos estratégicos	Para lograr la excelencia en (H+D) nuestros objetivos estratégicos específicos estarán enfocados en el desarrollo de las líneas de investigación propuesta en la matriz 1 del QFD.
	E1: Emprendimiento innovador de Incubadora, Aceleradora, Cotrabajo
	E2: Prototipo innovador, dinámico
	E3: Replicar tu proyecto: Máquina inteligente, robots, producción digital, impresión 3D
	E4: Educación Experiencial “qué”, “cómo” y “por qué”
	E5: Inteligencia Artificial aplicada a la educación, salud e industria.
	E6: Salud pública ocupacional y gestión estomatológica.
	E7: Estructuras, geología, materiales de construcción e impactos ambientales de obras públicas y edificaciones.
	E8: Recursos hídricos tomando en cuenta los cambios climáticos.
	E9: Tecnología e innovación en el agro, salud y medio ambiente para la elaboración de nuevos productos agrícolas.
	E10: Superalimentos, Microorganismos asociados a heladas en cultivos comerciales.
E11: Turismo, e informática en ecoturismo y medioambiente.	

**Tabla 2.**  
Desarrollo de los procesos estratégicos específicos de emprendimiento

Área	Actividades de emprendimiento
A1 Firma de convenios	Firma de convenios con pasantías Tecnológicas, Misiones Tecnológicas Convenios con otros centros y laboratorios de investigación que desarrollan CTI
A2 Consultorías	Servicio externo a empresas público, privadas*
A3. Capacitar al docente y estudiantes emprendedores	Capacitar a docentes pregrado y posgrado para mejorar su habilidad y aumentar el número de proyectos a sometidos al cliente
	Capacitar a docentes pregrado y posgrado para mejorar su habilidad de investigador para incrementar publicaciones
	Capacitar a los estudiantes de pregrado y posgrado para incrementar su habilidad de investigador para incrementar publicaciones
A4 Actualizar políticas	Actualizar políticas de investigación de acuerdo al requerimiento del cliente
A5. Conseguir fondos	Generar recursos financieros
A6 Talleres	Ejecución de talleres de emprendimiento e innovación para empresas emergentes, Cotrabajo
	Efectuar el dictado de taller de “replicas tu proyecto” con capital semilla
	Ejecución de talleres de educación experimental K12 P-14, P-16, P-18
	Realización de investigación tecnológica en ingeniería civil y ambiental
A7. Participación emprendedores en investigación	Realización de investigación de producción e innovación
	Realización de investigación Innovación Tecnológica Robótica e Industrial
	Realización de investigación de investigación tecnológica informática
	Realización de investigación de investigación en salud
	Contratar y/o invitar coordinadores administrativos
	Realizar investigaciones sobre el poder curativo de las plantas regionales
A8. Incentivos	Contratar personal técnico con experiencia en investigación para apoyo a los investigadores
	Fortalecer la labor del investigador con incentivos, reconocimiento y motivación
A9. Capacitar	Fortalecer la labor del docente con capacidad de liderazgo
	Establecer el año sabatino en investigación y emprendimiento
	Asignar responsabilidades a docente investigador-emprendedor nuevos proyectos
	Generar Talleres, Cursos y Seminarios para generar competencias para Publicar en Revistas Internacionales Indexadas en Scopus
	Capacitación de uso de Inteligencia Artificial en la Academia
	Capacitación para mejorar la competencia de Publicar en revistas internacionales indexadas, mínimo Scopus.
A10. Participación de Emprendedores	Capacitación Conocimientos de herramientas informáticas
	Redacción e interrelación en textos en inglés
	Capacitación para dominio técnico de Idioma extranjero; inglés (mínimo intermedio), otros
	Capacitaciones dirigidas para fortalecer emprendimiento en la mujer
	Participación en Congresos Nacionales e Internacionales
Participación en Proyectos de investigación nacional internacional	
Participación en grupos o redes de investigación	

## 5. SEGUIMIENTO Y CONTROL ESTRATÉGICO DE EMPRENDIMIENTO

En esta etapa se visualizan los controles de servicio estratégico de control y seguimiento a los cumplimientos. En la Tabla 3 se describe un cuadro descriptivo dividido en áreas como: emprendimiento, investigación y administrativo, éstos a su vez tendrán un seguimiento basado en el número de talleres, capacitaciones, estudiantes, publicaciones o papers.

**Tabla 3.**  
*Desarrollo de indicadores claves de desempeño o indicadores de gestión Innóvate*

Seguimiento y control de emprendimientos estratégicos	
<b>Emprendimiento</b>	Número de cursos talleres dirigidos a emprendimiento de incubadoras, aceleradoras para empresas emergentes Número de cursos de escuela de negocios dirigido a emprendedores Número Talleres ejecutados en laboratorio fabuloso "replica tu proyecto". Número de cursos dirigidos a promover la Educación experimental Número de capacitaciones dirigidas para fortalecer emprendimiento en la mujer Número de estudiantes que accedieron a pasantías Tecnológicas Número de estudiantes que accedieron a misiones Tecnológicas** Número de proyectos de emprendimiento innovador Número de proyectos de emprendimiento dinámico Reconocimiento, premiación e incentivo para emprendedores exitosos
<b>Investigación</b>	Número de publicaciones de soluciones tecnológicas por docente Número de publicaciones de innovación tecnológica por docente Número de paper emprendimientos empresariales por docente Número de paper de modernización tecnológica en empresas por docente Número de paper de incubación/ aceleración de negocios por docente Número de consultorías a empresas público, privadas* Número de publicaciones mínimo Scopus en Dispositivos usables de monitoreo en Salud e Industria Número de publicaciones mínimo Scopus Control y automatización industrial Número de publicaciones mínimo Scopus en Ingeniería de materiales compuestos Número de publicaciones mínimo Scopus en otras áreas Número de publicaciones mínimo Scopus en Salud Pública, Epidemiología y Ecología Número de publicaciones mínimo Scopus en Línea de investigación en dermatología Número de publicaciones mínimo Scopus en informática Biomédica en Salud Global Número de publicaciones mínimo Scopus en Inteligencia Artificial aplicada a la educación e industria Número de publicaciones mínimo Scopus en Salud pública ocupacional y gestión estomatológica Número de publicaciones mínimo Scopus en Estructuras, geología, materiales de construcción e impactos ambientales de obras públicas y edificaciones* Número de publicaciones mínimo Scopus en Recursos hídricos tomando en cuenta los cambios climáticos Número de publicaciones mínimo Scopus en Tecnología e innovación en el agro, salud y medio ambiente para la elaboración de nuevos productos agrícolas Número de publicaciones mínimo Scopus Superalimentos, Microorganismos asociados a heladas en cultivos comerciales Número de publicaciones mínimo Scopus en Turismo, e informática en ecoturismo y medioambiente Número de publicaciones indexadas a revistas científica Número de asesoría a alumnos de pregrado y posgrado Porcentaje de alumnos de pregrado participando en Investigación Porcentaje de alumnos de posgrado participando en Investigación Reconocimiento, premiación e incentivo para investigadores exitosos
<b>Administración</b>	Cumplimientos de capacitaciones a docentes para mejorar su habilidad del profesor investigador para aumentar el número de proyectos a someter al cliente Cumplimientos de capacitaciones a docentes para mejorar su habilidad de investigador para incrementar publicaciones Incrementar el presupuesto interno para mejoras y adquisición de equipos Incrementar el presupuesto interno para mejoras en los centros y laboratorios

## 6. SEGUIMIENTO Y CONTROL ESTRATÉGICO DE EMPRENDIMIENTO

Ahora que se ha definido seguimiento y control estratégico de emprendimiento a continuación se debe definir las metas y designación de responsabilidades, se presenta el cuadro "seguimiento y control al emprendimiento" que

está en función de cantidades de cursos, talleres, o proyectos, metas (que tan periódica debe ser el seguimiento en un intervalo de tiempo equivalente a un año) y un área responsable (ver Tabla 4).

**Tabla 4.**  
KPI y designación de responsabilidades de emprendimiento - Innóvate Perú

Seguimiento y control al emprendimiento	Metas	Responsable
Número de cursos taller dirigidos a emprendimiento de incubadoras, aceleradoras para empresas emergentes	4 por año	Dirección de emprendimiento
Número de cursos de escuela de negocios dirigido a emprendedores	4 por año	Dirección de emprendimiento
Número Talleres ejecutados en laboratorio fabuloso "replica tu proyecto".	8 por año	Dirección de emprendimiento
Número de cursos dirigidos a promover la Educación experimental	4 por año	Dirección de emprendimiento
Número de capacitaciones dirigidas para fortalecer emprendimiento en la mujer	4 por año	Dirección de emprendimiento
Número de estudiantes que accedieron a pasantías Tecnológicas	10 por año	Dirección de Cooperación Técnica y Relaciones
Número de estudiantes que accedieron a misiones Tecnológicas**	10 por año	Dirección de Cooperación Técnica y Relaciones
Número de proyectos de emprendimiento innovador	5 por año	Dirección de emprendimiento
Número de proyectos de emprendimiento dinámico	2 por año	Dirección de emprendimiento
Reconocimiento, premiación e incentivo para emprendedores exitosos	2 por año	Dirección de emprendimiento

**Tabla 5.**  
KPI y designación de responsabilidades de investigación - Innóvate Perú

Seguimiento y control en investigación	Métricas KPIs	Responsable
Número de publicaciones de soluciones tecnológicas por docente	1 por año	Dirección de emprendimiento
Número de publicaciones de innovación tecnológica por docente	1 por año	Dirección de emprendimiento
Número de paper de emprendimientos empresariales por docente	1 por año	Dirección de emprendimiento
Número de paper de modernización tecnológica en empresas por docente	1 por año	Dirección de emprendimiento
Número de paper de incubación/ aceleración de negocios por docente	1 por año	Dirección de emprendimiento
Número de consultorías a empresas públicas y privadas	10 por año	Dirección de Cooperación Técnica y Relaciones
Número de publicaciones mínimo Scopus en Dispositivos Usables de monitoreo en Salud e Industria	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus Control y automatización industrial	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en ingeniería de materiales compuestos	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en otras áreas	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en Salud Pública, Epidemiología y Etología	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en Línea de investigación en dermatología	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en informática Biomédica en Salud Global	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en Inteligencia Artificial aplicada a la educación e industria	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en Salud pública ocupacional y gestión estomatológica	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en Estructuras, geología, nuevos materiales de construcción e impactos ambientales de obras públicas y edificaciones	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en Recursos hídricos lamada en frente los cambios climáticos	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en Tecnología e innovación en el agro, salud y medio ambiente para la elaboración de nuevos productos agrícolas	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus Superfamentos, Microorganismos asociados a heladas en cultivos comerciales	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en Turismo, e informática en ecoturismo y medioambiente.	5 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones mínimo Scopus en innovación en la aplicación de plantas medicinales	3 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de publicaciones indexadas a revistas científica	10 por año	Dirección de emprendimiento, Vicerrectorado de investigación
Número de asesoría a alumnos de pregrado y posgrado	10 por año	Dirección investigación de posgrado, Decano
Porcentaje de alumnos de pregrado participando en investigación	15% por año	Decano
Porcentaje de alumnos de posgrado participando en investigación	80% por año	Decano
Reconocimiento, premiación e incentivo para investigadores exitosos	2 por año	Rector

Seguidamente, se muestra el cuadro “Seguimiento y control en investigación” que está en función del número de publicaciones, Papers, Consultorías, Métricas KPIs y un área responsable (Tabla 5). Por último, se muestra el cuadro “Seguimiento y control administrativo” que muestra información respecto los cumplimientos de capacitaciones docentes, presupuesto interno para mejoras en centros o laboratorios, Métricas KPIs y un área responsable (Tabla 6).

## 7. KPIs O INDICADORES

Los KPIs son medidas del nivel del rendimiento de un proceso (Parmenter, 2015), es por ello que, en una primera etapa, la institución educativa deberá invertir en la implementación de las líneas de investigación y departamento de emprendimiento, así como otras actividades como capacitación para el fortalecimiento de las mismas. Consecuentemente, es importante darle seguimiento y control a este plan estratégico, para así darle sentido dinámico a este documento estratégico de importancia para la investigación en la institución educativa. La idea es que este documento permita un actuar dinámico, que se plasma en las funciones y responsabilidades de cada uno de los tomadores de decisiones, jefes, líderes, etc.

Los indicadores que se describen no aplican a otra institución, para obtener dichos indicadores se sugiere evaluar el estado situacional de una y en base a los esfuerzos de gestión y presupuesto de la investigación proponer metas alcanzables.

## 8. DESIGNACIÓN DE RESPONSABILIDADES

En la Tabla 3, se puede notar que se tiene tres grandes grupos: el emprendimiento, la investigación, y la gerencia y administración. El emprendimiento debe ser un Pilar en la universidad (Baron & Shane, 2007), el rectorado debe tomar la responsabilidad de formar una comisión y oportunamente antes de la ejecución de este plan coordinar con asamblea universitaria

**Tabla 6.**

*KPI y designación de responsabilidades administrativas - Innóvate Perú*

Seguimiento y control Administrativo	Métrica KPIs	Responsable
Cumplimientos de capacitaciones a docentes para mejorar la competencia del profesor investigador para aumentar el Número de proyectos a someter al cliente	4 por año	Departamento de Calidad
Cumplimientos de capacitaciones a docentes para mejorar la competencia del profesor en investigación y así incrementar las publicaciones científicas	4 por año	Departamento de Calidad
Incrementar el presupuesto interno para mejoras y adquisición de equipos	25% al año	Asamblea Universitaria
Incrementar el presupuesto interno para mejoras en los centros y laboratorios	25% al año	Asamblea Universitaria

Para la creación del departamento de emprendimiento se debe asignar un responsable a cumplir las métricas estipuladas.

Además, se observa que hay un competente de investigación que atenderán fundamentalmente los requerimientos de Innovate. Estas actividades correspondientes también tienen métricas y los responsables de dar seguimiento son los directores de investigación de cada facultad, el vicerrectorado de investigación, los decanos y el rector. Finalmente, en la última parte se tiene a los gerentes y administradores que tiene actividades que cumplir e indicadores que deben fijarse como meta.

Se observa en el cuadro de seguimiento y control en emprendimiento, que existe la necesidad de contar con una dirección de emprendimiento (la institución caso de estudio no la posee aun). Asimismo, asignar un responsable que será el director de emprendimiento en la sede principal y subdirectores de emprendimiento para las filiales que permitirá alcanzar fondos concursales en los próximos programas de Innóvate Perú y Canon minero.

También es recomendable crear departamento de relaciones internacionales que va a permitir darle un peso a las diferentes gestiones útiles y necesarias como las pasantías tecnologías que permiten que los emprendedores locales puedan acceder a empresas o centros e innovación extranjeras que ostentan tecnologías de primer nivel, siempre que mediante la transferencia tecnológica los estudiantes puedan aplicar esos conocimientos adquiridos en centros innovadores y de emprendimientos locales.

## 9. KPIs Y DESIGNACIÓN DE RESPONSABILIDADES FINALES

Utilizando el QFD, se desarrolla un organigrama estructurado de organización estratégica para fortalecer el programa de investigación científica y de innovación en la institución educativa, para ello se propone adicionar al organigrama estructural de la institución educativa, la dirección de investigación y la dirección de emprendimiento, las cuales deberán estar interconectados entre sí con la dirección académica y el vicerrectorado (ver Figura 4) con ello los beneficios que se conseguirán incluyen:

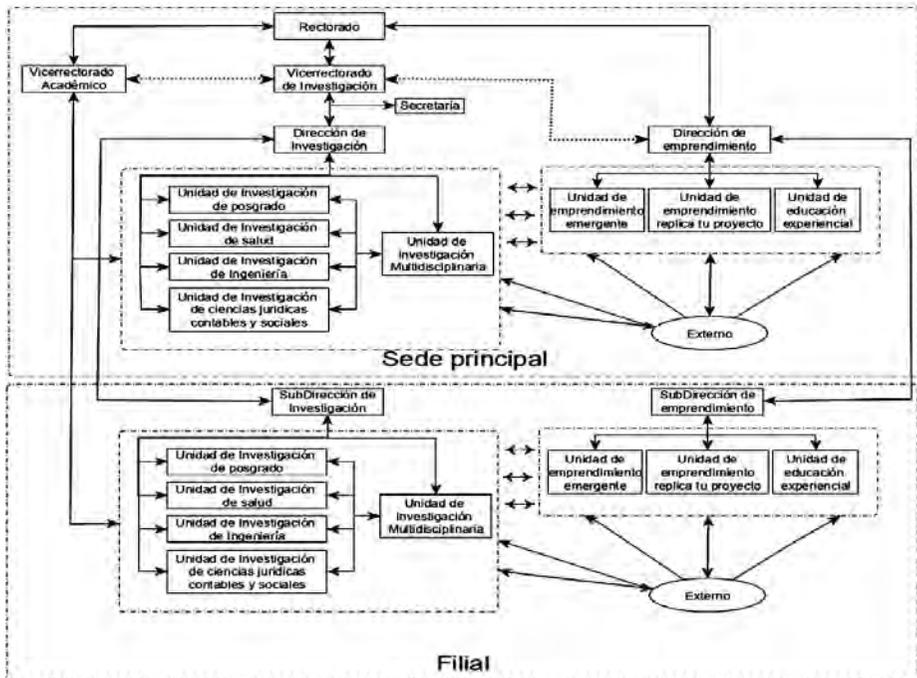
Mejor reconocimiento de quiénes serán clientes futuros por las publicaciones. Una precisión (y debilidad) de las áreas de fuerza de investigación en la institución educativa.

La caracterización de aquellas áreas de investigación que son de mayor interés para nuestros clientes.

La identificación de los procesos apropiados para desarrollar nuestra reputación de investigación departamental para que podamos responder mejor a las necesidades de nuestro cliente Innóvate Perú en áreas de investigación definida.

En el proceso general de QFD se ha desarrollado las Instrucciones de seguimiento y control. Aunque aún no se tienen instrucciones detalladas, se desarrolló una lista de puntos que resumen las actividades que conforman el proceso de planificación de investigación estratégica. La responsabilidad de cada una de estas áreas ha sido o será asignada a cada uno o más miembros de la casa de estudio.

Figura 4.  
Organigrama estructural TQP de investigación de la institución educativa.



Asimismo, se observó la necesidad de concentrarse en agregar profundidad a algunos de los cursos de emprendimiento tales como los talleres de emprendimiento empresarial o el curso “replica tu proyecto”. También es beneficioso enseñar a los estudiantes graduados los tópicos que para la institución educativa interesa investigar, así ellos estarán más involucrados en el trabajo de investigación al cual los investigadores/innovadores de la casa de estudios están alineados o en proceso de adaptación o migración.

Por último, a continuación, se muestra un organigrama (basado en la calidad de producto total, TQP, ver Figura 4) para empoderar multidireccionalmente a los factores involucrados en la reputación de la institución de la institución educativa.

## 10. POLÍTICAS DE INVESTIGACIÓN QFD DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA

La política es una declaración formal, pública y voluntaria del rectorado, sirven para gestionar la creación científica e intelectual de la institución educativa. Estas políticas deben tener sintonía con los desarrollados con anterioridad (lo ideal es buscar un cambio disruptivo puesto que el presente PEDI se basa en la ciencia). En el caso de estudio se centró en: QFD para Innóvate Perú. Estas políticas para la Gestión de la investigación en la institución educativa están alineadas a la visión, misión y valores de la institución educativa. Entre las múltiples políticas desarrolladas, la más destacables son:

**P1:** “Alinear la investigación actual a lo que realmente financia Innóvate (previo un análisis del plan estratégico de Innóvate, que debe estar orientado a las necesidades de los peruanos y empresas)”, implementar estrategias, para el logro de los Objetivos, desarrollo de las actividades para alcanzar el fin o resultados propuestos en PEDI para maximizar el valor y los beneficios para todos en el Perú.

**P2:** Alinear los emprendimientos a los que se necesita, para maximizar el valor y beneficios para todos los peruanos. Así mismo gestionara y hacer la propuestas necesarias y suficientes para que, el Estado e Instituciones como Innóvate Perú, Concytec y otros, tengan propuestas que estén alineadas a las necesidades de Innovación, Desarrollo y Emprendimientos, que generen valor y beneficios para todos en el país. En ese mismo sentido Innóvate Perú, es un cliente interno, y es un aliado en desarrollo de estrategias como: Emprendimiento innovador de incubadora, Aceleradora, Cotrabajo, Replicar tu proyecto, Maquina inteligente, robots, producción digital, impresión 3D. Educación Experiencial “qué”- “cómo” y “por qué” orientada a escuelas y colegios donde los estudiantes aprenden experimentando, haciendo y observando. Así como, emprender soluciones innovadoras y tecnológicas, con las empresas públicas y privadas nacionales.

Asimismo, Orientar a formar, desarrollar y mejorar el talento en investigación y la creación científica e intelectual, que mejore en el estudiante de pregrado y posgrado las capacidades Innovar y Emprender, pero además de publicar en revistas internacionales indexadas Scopus. Igualmente promover la participación del estudiante de pregrado y posgrado en grupos o redes de investigación nacional e internacional.

## **11. CONCLUSIONES**

Este plan estratégico, “Organigrama estructural TQP de investigación de una institución educativa”, es nuevo y su éxito dependerá de la decisión político estratégica que tomen el doctorado de investigación, el Rector, el Consejo Universitario y la Asamblea Universitaria, ya que estas líneas de investigación, que fueron obtenidas para maximizar el valor Mediante la QFD a través de un proceso de planeación, diseño, ejecución, y seguimiento y control, son áreas de investigación que no sólo se alinean con los requerimientos de Innóvate sino con lo que necesita el país para maximizar los beneficios de su población. Este plan estratégico se justifica y alinea con las necesidades de los que exigen el PEDÍ e Innóvate, con lo cual facilitan la obtención de financiamiento que permita soportar o impulsar la investigación con mayores posibilidades de éxito y así obtener recursos económicos para las actividades de investigación locales, regionales y nacionales.

Como resultado, contribuirá significativamente con mejoras e innovación para desarrollar económica y socialmente al Perú por cuanto generará conocimientos que se traducirán en artículos científicos que darán soporte para la obtención de patentes. Además, permitirán sustentar las posibilidades de acreditación y licenciamiento de la universidad.

Es importante mencionar que, en el marco de este PEDÍ, la institución será acreditada por un periodo de 6 años por la Superintendencia Nacional de Educación Superior Universitaria, SUNEDU.

## 12. REFERENCIAS

- Aldunate, E., & Córdoba, J. (2011). Formulación de programas con la metodología de marco lógico. *CEPAL*, 68. <https://hdl.handle.net/11362/5507>
- Arboleada Valencia, L. M. & Perdomo Cruz, S. (2019). *Proyecto de Despliegue de la Función Calidad Quality Function Deployment (QFD) Aplicada a una crema de manos*. Universidad Santiago de Cali.
- Baron, R. A., & Shane, S. (2007). Entrepreneurship: A process perspective. *The psychology of entrepreneurship*, 19-39.
- Chen, C. L., & Bullington, S. F. (1993). Development of a strategic research plan for an academic department through the use of quality function deployment. *Computers & industrial engineering*, 25(1-4), 49-52. [https://doi.org/10.1016/0360-8352\(93\)90218-M](https://doi.org/10.1016/0360-8352(93)90218-M)
- Dinçer, H., Yüksel, S., & Martinez, L. (2019). Balanced scorecard-based Analysis about European Energy Investment Policies: A hybrid hesitant fuzzy decision-making approach with Quality Function Deployment. *Expert Systems with Applications*, 115, 152-171. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2018.07.072>
- Duhovnik, J., Kušar, J., Tomažević, R., & Starbek, M. (2006). Development process with regard to customer requirements. *Concurrent Engineering*, 14(1), 67-82. <https://doi.org/10.1177/1063293X06064149>
- Gunasekaran, A., Subramanian, N., & Ngai, W. T. E. (2019). Quality management in the 21st century enterprises: Research pathway towards Industry 4.0. *International journal of production economics*, 207, 125-129. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2018.09.005>
- Habib, T., Ghani, U., Hayat, M., & Noor, I. (2021). Process improvement by applying quality function deployment in a locomotive manufacturing. *Academic Journal of Manufacturing Engineering*, 19(4). [https://www.ajme.ro/PDF\\_AJME\\_2021\\_4/L13.pdf](https://www.ajme.ro/PDF_AJME_2021_4/L13.pdf)
- Hunt, R. A., & Xavier, F. B. (2003). The leading edge in strategic QFD. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 20(1), 56-73. <https://doi.org/10.1108/02656710310453818>

- Innovate Perú. (2021). Innovate Perú. Recuperado de <https://www.proinnovate.gob.pe/32-innovate-peru>
- Lu-Chang-Say, J., Lu-Chang-Say, E., Zuloaga-Rotta, L., & Zarate-Otarola, B. (2018). DNA Lean Philosophy and TOC for Develop, Innovate and Improve Processes. *Easy-Chair*, (266). <https://doi.org/10.29007/133k>
- Parmenter, D. (2015). *Key performance indicators: developing, implementing, and using winning KPIs*. John Wiley & Sons.
- Resolución de Consejo Universitario N° 0509-2017-UTEA-CU de 2017 [Universidad Tecnológica de los Andes]. Aprobación, El Instructivo General sobre Investigación Pregrado y Postgrado, que es una herramienta pedagógica normativa y orientadora para los alumnos de pre grado y post grado y docentes investigadores, permitiendo realizar en forma eficiente y eficaz el proceso de investigación en la Universidad Tecnológica de los Andes. 17 de mayo del 2017. <http://portal.utea.edu.pe/wp-content/uploads/2018/03/Resolucion-N%C2%B0-0509-2017-Instructivo-general-sobre-investigacion-pregrado-y-posgrado.pdf>
- Rianmora, S., & Werawatganon, S. (2021). Applying quality function deployment in open innovation engineering. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*, 7(1), 26. <https://doi.org/10.3390/joitmc7010026>
- Tang, Y., Wei, J., Xin, Y., & Mou, X. (2022). Curriculum design for vocational industrial robotics: the quality function deployment (QFD) approach used in China for vocational course design. *SN Social Sciences*, 2(5), 64. <https://doi.org/10.1007/s43545-022-00366-z>
- Vela Meléndez, L., Acevedo Sánchez, E. R., Yesquén Zapata, P., & Venturra Carrillo, G. (2018). Ciencia, tecnología e innovación en el Perú. Necesidad de una política pública descentralista, que institucionalice las alianzas Academia-Empresa-Estado y Sociedad Civil. *GeoGraphos*, 9(106), p. 138-157. <https://doi.org/10.14198/GEOGRA2018.9.106>





# Apuntes



---

# REVISTA IECOS

## INSTRUCCIONES A LOS AUTORES

La Revista IECOS, indexada en LATINDEX, CROSSREF, es una publicación de acceso abierto cuya edición es semestral, durante los períodos de enero - junio, y de julio – diciembre.

### Convocatorias y arbitraje:

- Las convocatorias se realizarán, formalmente, dos veces al año. Además, por consideraciones específicas, se podrán hacer convocatorias extraordinarias.
- Para ser aceptados para la evaluación, los manuscritos deben ser originales y de alta calidad referidos a los campos de las Ciencias Sociales Aplicadas (economía, negocios, administración, sociología, educación, política, derecho, comunicación y estudios urbanos).
- Los documentos que cumplan estas condiciones, serán sometidos al sistema de revisión bajo la modalidad de arbitraje “doble ciego”.

### Tipos y contenidos de los manuscritos a presentar:

#### 1. Artículos de investigación científica:

- Introducción
- Metodología
- Resultados
- Referencias
- Apéndices

#### 2. Estados del arte (Revisión de literatura) de un tema específico

- Problema
- Revisión bibliográfica
- Discusión
- Referencias
- Apéndices

#### 3. Ensayos

- Problema
- Argumentos y objeciones
- Alternativas
- Referencias
- Apéndices

---

#### 4. Estudios o Reportes de caso

- Estudio de un problema
- Descripción del caso
- Alternativas de solución
- Discusión de resultados
- Referencias
- Apéndices

#### 5. Otros documentos:

- Reseña crítica de libros
- Entrevistas

#### Consideraciones formales:

- Título principal:  
En mayúsculas, conciso y sin abreviaturas; el título no deberá exceder las 12 palabras y se presentarán en español e inglés.
- Autores:  
Se indican los nombres y apellido(s), indicando el grado académico y una sola filiación institucional y la dirección electrónica institucional. Estos datos, deben ser ubicados debajo de los títulos. En el caso de varios autores, los nombres serán colocados según orden alfabético.
- Resumen:  
Un máximo de 200 palabras, en un solo párrafo, el resumen debe ser estructurado con: objetivos, metodología, resultados y conclusiones.
- Abstract: Traducción del resumen en idioma inglés.
- Palabras claves: Máximo cinco palabras
- Keywords: Traducción de las palabras clave al idioma inglés.

#### Referencias bibliográficas y citas:

- Las citas, al igual que sus respectivas referencias, se redactarán siguiendo las normas generales de APA (séptima edición). El correcto citado es obligatorio, a fin de cumplir con la ley de derechos de autor y protección de propiedad intelectual.
- Como referencias, se presentarán únicamente aquellas que han sido citadas en los artículos. No se permiten referencias que no estén citadas en el texto.

#### Datos de Contacto:

- Los artículos se recibirán en el correo electrónico: [iecos@uni.edu.pe](mailto:iecos@uni.edu.pe)

Lima, enero de 2024



SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EN LOS TALLERES GRÁFICOS DE

**TAREA ASOCIACIÓN GRÁFICA EDUCATIVA**

PASAJE MARÍA AUXILIADORA 156 - BREÑA

CORREO E.: [tareagrafica@tareagrafica.com](mailto:tareagrafica@tareagrafica.com)

PÁGINA WEB: [www.tareagrafica.com](http://www.tareagrafica.com)

TELÉFONOS: 424-8104 / 424-3411

DICIEMBRE 2023 LIMA - PERÚ



# revista iecos

**Investigaciones Económicas y Sociales**

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA ECONÓMICA, ESTADÍSTICA Y CIENCIAS SOCIALES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA