



Modelaje de la Volatilidad en el mercado peruano de acciones

Carlos A. Abanto Valle*

Resumen

Este artículo comienza con una introducción a la literatura de los modelos de volatilidad que varían en el tiempo y aborda, de manera sucinta, la implementación Bayesiana de la clase de modelos ARCH/GARCH/EGARCH. Asimismo, se presenta una aplicación usando la serie de retornos del Índice de Retornos de la Bolsa de Valores de Lima (IBVL) y, finalmente, se comparan diferentes especificaciones de la clase de modelos GARCH/EGARCH usando el criterio DIC.

Palabras clave: Heterocedasticidad, GARCH, EGARCH, algoritmo de Gibbs, algoritmo de Metropolis-Hastings, criterio DIC.

Introducción

La volatilidad es una característica fundamental de los mercados financieros modernos, cuya medida y previsión es de vital importancia para los accionistas o para los corredores de acciones, quienes generalmente tienen que tomar decisiones dependientes de medidas de volatilidad y riesgo de los negocios.

La clase de los modelos ARCH/GARCH/EGARCH es usada frecuentemente en la literatura financiera moderna como una alternativa para modelar la volatilidad de los retornos de forma que varíe en el tiempo. En los modelos ARCH/GARCH introducidos por Engle (1982) y Bollerslev (1986), la volatilidad es expresada como una función determinística de los cuadrados de los retornos y de la propia volatilidad desfasadas. Esta clase de modelos experimentó un crecimiento extraordinario en los aspectos teóricos y en las aplicaciones debido a la sencillez de su implementación y por sus propiedades empíricas (ver Bollerslev, Chow y Kroner, 1992; y Bollerslev, Engle y Nelson, 1994, para una revisión más amplia).

1. Modelos GARCH

La popularidad de los modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedastic) introducidos por Engle (1982) y de los modelos GARCH (Generalized ARCH) ha experimentado un gran crecimiento en la literatura financiera por su capacidad

de recuperar los hechos estilizados presentes en las series de retornos, como por ejemplo el agrupamiento de volatilidad. Esto quiere decir que días con grandes movimientos serán seguidos por días con las mismas características y viceversa. Una revisión exhaustiva de la literatura puede encontrarse en Bollerslev et. al. (1992) y Bollerslev et. al. (1994).

El modelo GARCH(p,q) propuesto por Bollerslev (1986) puede ser representado por la siguiente formulación:

$$y_t = h_t \epsilon_t \quad (1)$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \quad (2)$$

donde:

son variables iid con $E(\epsilon) = 0$ $V(\epsilon) = 1$; h_t^2 es la varianza incondicional del proceso $\{y_t\}$ en t ; p y q son enteros tal que $p > 0$ y $q \geq 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$; y $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$.

Estas restricciones garantizan la positividad de la varianza. Para asegurar que el proceso de covarianza estacionario se tiene que: $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$; para mayores detalles ver por ejemplo Bollerslev (1986).

Asumiendo que $\epsilon_t \sim N(0,1)$, en donde $N(\mu, \sigma^2)$ denota a la distribución normal con media μ y varianza σ^2 respectivamente, la función de verosimilitud es dada por:

$$l(y | \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, h_0^2) \propto \prod_{t=1}^T (h_t^2)^{-1} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t^2}\right) \quad (3)$$

Otras extensiones de los modelos GARCH han sido propuestas en la literatura especializada, por ejemplo, usando la distribución *t-Student-t* con ν grados de libertad

para tratar con las colas pesadas de la distribución de y_t (Bollerslev, 1987; Baillie y Bollerslev, 1989). Entonces, la función de verosimilitud es dada por

$$l(y | \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \nu, h_0^2) \propto \prod_{t=1}^T \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) [(v-2)h_t^2]^{1/2}} \right\} \prod_{t=1}^T \left(1 + \frac{y_t^2}{(v-2)h_t^2}\right)^{-(v+1)/2} \quad (4)$$

El modelo EGARCH (*Exponential GARCH*) fue introducido por Nelson

(1991) con la finalidad de evitar imponer restricciones en α_i y β_j , entonces:

$$\log(h_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[\alpha_i \frac{y_{t-i}}{h_{t-i}} + \varphi_i \left(\left| \frac{y_{t-i}}{h_{t-i}} \right| - E \left| \frac{y_{t-i}}{h_{t-i}} \right| \right) \right] + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(h_{t-j}^2) \quad (5)$$

para la varianza condicional de $\{y_t\}$, tal que $h_t^2 > 0$, para todo t , y

$$E \left| \frac{y_{t-i}}{h_{t-i}} \right| = \frac{\Gamma(2/\nu)}{[\Gamma(1/\nu) \Gamma(3/\nu)]^{1/2}}$$

Los modelos EGARCH permiten describir efectos asimétricos presentes en las series de retornos. Como ha puntualizado Nelson (1991), si $\varphi_i > 0$, el desvío de $|\in_{t-1}|^1$ en relación con su valor esperado

causa que h_t^2 , la varianza condicional de Y_t , sea mayor que en otro caso. El parámetro α_i permite que este efecto sea asimétrico: si $\alpha_i = 0$, \in_{t-i} positivo tendrá el mismo efecto que si \in_{t-i} negativo. Pero si $-1 < \alpha_i < 0$, un valor positivo de \in_{t-i} hará que el incremento en las volatilidades futuras sea menor que si \in_{t-i} negativo. Finalmente, si $\alpha_i < -1$, \in_{t-i} positivo reducirá las volatilidades futuras mientras que un valor negativo producirá el efecto contrario.

¹ $\in_{t-i} = \frac{y_{t-i}}{h_{t-i}}$

2. Estimación Bayesiana de los Modelos GARCH y EGARCH

El análisis Bayesiano de modelos complejos y de grandes dimensiones generalmente implica que la distribución posterior no es analíticamente cerrada y es necesario utilizar métodos por computadora para evaluarla. Esta es la razón de la aplicación de métodos MCMC en el cálculo de integrales complejas.

La clave para los métodos MCMC es crear una cadena de Markov cuya distribución estacionaria sea $p(\theta|Y_T)$ y rodar la cadena suficientemente de modo tal que las muestras sean de la distribución estacionaria. Una vez que el algoritmo ha sido implementado, debe ser iterado hasta que la convergencia sea alcanzada.

Los algoritmos MCMC más usados son el de Gibbs y el de Metropolis-Hastings. Una descripción más amplia de los mismos puede ser encontrada en Gamerman y Lopes (2006). Para una revisión de los criterios de convergencia, véase por ejemplo Cowles y Carlin (1996).

El modelo GARCH (1,1) es la especificación GARCH más usada en la literatura y se obtiene a partir de (1) y (2) con $p = q = 1$

$$y_t = h_t \epsilon_t \tag{6}$$

$$h_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2 \tag{7}$$

Para realizar comparaciones entre los modelos usaremos dos especificaciones: el modelo GARCH(1,1)-N que denotará al modelo GARCH(1,1) con errores normales y el modelo GARCH(1,1)-t con los errores asumiendo la distribución *t-Student*. Estas especificaciones se obtienen de (6) asumiendo que $\epsilon_t \sim N(0,1)$ y $(v-2) / v \epsilon_t \sim t_v$, respectivamente.

Para efectos de ilustración será considerado el modelo EGARCH(1,1) con errores normales (EGARCH(1,1)-N), el cual puede ser obtenido de (5) con $p = q = 1$. Así, el modelo EGARCH(1,1)-N es especificado por

$$y_t = h_t \epsilon_t \tag{8}$$

$$\log(h_t^2) = \alpha_0 + \beta_1 \log(h_{t-1}^2) + \alpha_1 \left(\frac{y_{t-1}}{h_{t-1}} + \left| \frac{y_{t-1}}{h_{t-1}} \right| \right) \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \tag{9}$$

la distribución posterior de los parámetros de los modelos GARCH(1,1)-N, GARCH(1,1)-t y EGARCH(1,1)-N puede ser expresada de forma general como:

$$p(\theta | Y_T) \propto \left[\prod_{i=1}^T p(y_i | h_i) \right] p(\theta) \tag{10}$$

donde $p(\theta)$ es la distribución a priori.

Para realizar los cálculos de una cadena de Markov usando el algoritmo de Metropolis-Hastings para producir una secuencia de valores cuya distribución límite sea $p(\theta | Y_T)$. El núcleo de la distribución posterior

es dado por (10). La moda del logaritmo de (10) es obtenida fácilmente usando rutinas numéricas disponibles en el software Ox. Sea θ y la matriz Hessiana por H . Sea $q(\cdot|\theta^{j-1})$ es la distribución normal multivariada con media θ y matriz de varianza dada por la inversa de la matriz Hessiana evaluada en θ . Sea z un candidato, el cual es aceptado con probabilidad $\alpha(\theta^{j-1}, z)$ donde

$$\alpha(\theta^{j-1}, z) = \min \left\{ \frac{p(z|Y_j)q(\theta^{j-1}|z)}{q(\theta^{j-1}|Y_j)p(z|\theta^{j-1})}, 1 \right\}$$

Si la propuesta es aceptada, se tiene que $\theta^j = z$. Por el contrario, si la propuesta es rechazada, entonces la cadena no se mueve y $\theta^j = \theta^{j-1}$. El algoritmo de Metropolis-Hastings es bastante simple y puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Indicio: Asignar valores iniciales $\theta^{(0)}, j = 0$
2. Para $j \geq 1$, extraer un candidato $z \sim q(z | \theta^{j-1})$
3. Muestrear $u \sim (0,1)$, si $u \leq \alpha(\theta^{j-1}, z)$, hacer $\theta^j = z$ en otro caso $\theta^j = \theta^{j-1}$
4. $j = j + 1$ y retornar a 2 hasta alcanzar convergencia.

3. Aplicación

El Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (IGBVL) refleja la tendencia promedio de las cotizaciones de las principales acciones

inscritas en Bolsa, en función de una cartera seleccionada, que actualmente representa a las 35 acciones más negociadas del mercado. Su cálculo considera las variaciones de precios y los dividendos o acciones liberadas repartidas, así como la suscripción de acciones. Tiene como fecha base 30 de diciembre de 1991 = 100.

La fórmula de cálculo del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima, que se usa también para el cálculo de los demás índices, es la siguiente:

El Índice General de la Bolsa de Valores de Lima (IGBVL) refleja la tendencia promedio de las cotizaciones de las principales acciones inscritas en Bolsa, en función de una cartera seleccionada, que actualmente representa a las 35 acciones más negociadas del mercado. Su cálculo considera las variaciones de precios y los dividendos o acciones liberadas repartidas, así como la suscripción de acciones. Tiene como fecha base 30 de diciembre de 1991 = 100.

La fórmula de cálculo del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima, que se usa también para el cálculo de los demás índices, es la siguiente:

$$IGBVL_t = \frac{\sum_{i=1}^{35} \frac{P_{it} - W_t - C_i}{P_{io}}}{\sum_{i=1}^3 5W_i} \times 100 \quad (11)$$

donde:

P_{it} : Precio de la acción "i" en el día "t".

P_{io} : Precio de la acción "i" en la fecha base.

W_i : Peso de la acción "i" dentro de la cartera. Este peso se determina según el monto efectivo negociado, la frecuencia y el número de operaciones que registra el valor.

C_i : Corrector acumulado por entrega de acciones liberadas, dividendos en efectivo y derechos de suscripción.

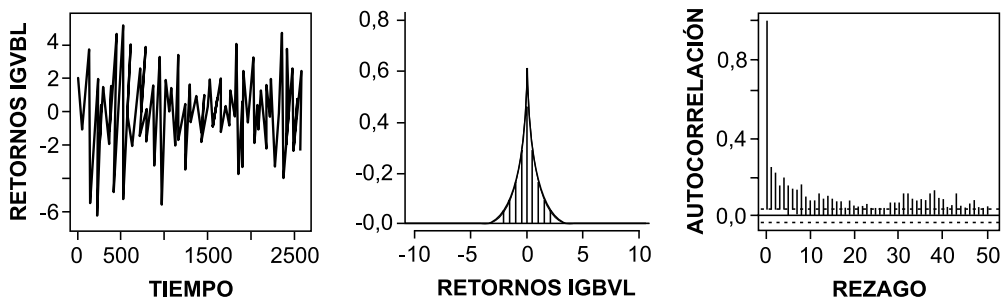
1 de julio como fechas para la entrada en vigencia de la cartera actualizada. Sin embargo, si las circunstancias del mercado así lo determinan, las carteras pueden permanecer invariables, lo que será comunicado oportunamente al mercado.

Para ilustrar la aplicación de los modelos presentados en las secciones anteriores previas, se usará la serie del Índice General de la Bolsa de Valores de Lima para el periodo comprendido entre el 3 de enero de 1997 y el 2 de enero de 2007. Resultado en 2568 observaciones. En lo que sigue usaremos los retornos compuestos corregidos por la media que son calculados a partir de

Con la finalidad de mantener constantemente actualizada la cartera del IGBVL, se ha estimado conveniente la realización de una revisión semestral, habiéndose definido el 2 de enero y el

$$y_t = 100x \left[\log(x_t / x_{t-1}) - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log(x_t / x_{t-1}) \right] \tag{12}$$

Figura 1
Conjunto de datos retornos diarios del IGBVL



Izquierda: serie de retornos, **centro:** histograma de los retornos y su correspondiente densidad estimada y la aproximación normal, **derecha:** función de autocorrelación de los cuadrados de los retornos.

donde x_t representa el valor del IGBVL en el día t.

La Figura 1 presenta la serie histórica de los retornos del IGBVL, la cual sugiere la presencia de grupos de volatilidad: días con movimientos grandes son seguidos por días con las mismas características. Esto es confirmado por las funciones de autocorrelación de los retornos al cuadrado y el test de Jarque-Bera (ver cuadro 1). Esto sugiere que los retornos al cuadrado pueden seguir un ARMA(1,1), ya que el AR(1) no

puede combinar la persistencia en los choques con correlación baja. La Figura 1 también muestra el histograma de los retornos del IGBVL y el ajuste de la densidad estimada por métodos no paramétricos y la correspondiente densidad normal, sugiriendo una distribución leptocúrtica. Este hecho es confirmado con el coeficiente de curtosis 8,00, lo cual sugiere que la distribución normal podría no ser la más adecuada.

Cuadro 1
Estadísticas resumen de los retornos del IGBVL

Media	Mediana	Curtosis	Asimetría	Dev. Est.	Jarque-Bera
0,00	-0,07	8,00	-0,12	1,07	2684 (0,00)

La distribución a priori para los parámetros en el modelo GARCH(1,1) fue establecida como sigue: $p(\alpha^0) = \alpha_0^{-1}$, $p(\alpha_1, \beta_1) = 2/(\alpha_1 \geq 0; \beta_1 \geq 0; \alpha_1 + \beta_1 < 1)$ donde $l(\cdot)$ denota la función indicadora. La restricción de que α_1 y β_1 es equivalente a que el proceso sea covarianza estacionario. Considérese $\lambda = \log(h_0^2)$ como parámetro desconocido con priori $\lambda \sim N(\lambda^0, 100)$ donde $\lambda_0 = \log(\sum_{i=1}^T (y_i - \bar{y})^2 / T)$. En el caso de la distribución *t-Student distribution*, v ($v > 2$) grado de libertad es un parámetro a ser estimado y se usa la priori $\pi(v) = (v-2)^{-1}$ como Vrontos, Dellaportas y Politis (2000).

Las prioris del modelo EGARCH(1,1)-N fueron asumidas de la siguiente forma: $\alpha_0 \sim N(\alpha_0, s_{\alpha_0}^2)$, $\beta_1 \sim N(\beta_1, s_{\beta_1}^2)$, $\alpha \sim N(\alpha_1, s_{\alpha_1}^2)$, y $1 \sim N(y_1, s_{y_1}^2)$. Los hiperparámetros son escogidos centrados en la estimativa de

máxima verosimilitud y las varianzas multiplicadas por 100. De esta forma tales prioris son prácticamente no informativas por que su rango efectivo es mucho mayor que el rango de la distribución posterior resultante. Considérese $\lambda = \log(h_0^2)$ y la priori $\lambda \sim N(\lambda_0, 100)$, donde λ_0 fue la misma que en el caso GARCH(1,1).

Para los modelos GARCH/EGARCH considerados se tomó en cuenta una cadena de 12000 iteraciones. Las primeras 5000 fueron descartadas y las restantes 7000 usadas para hacer inferencias. En el cuadro 2 se presenta la muestra MCMC basada en las 7000 iteraciones. Aun cuando los resultados obtenidos indican la presencia de una alta persistencia en la serie de retornos diarios del IGBVL, el coeficiente de persistencia, $a_1 + b_1$ de los modelos GARCH(1,1) - N y

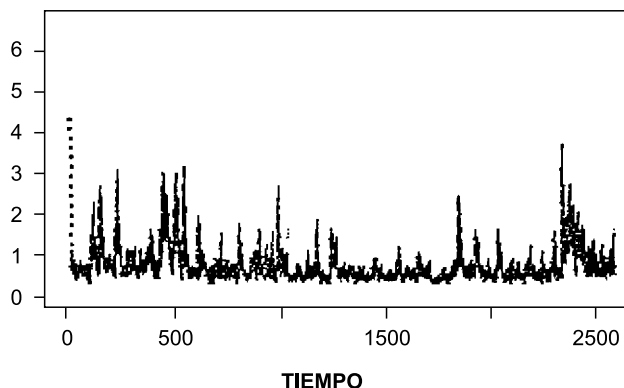
GARCH(1,1)-t, está en la región de estacionalidad. Sin embargo el intervalo confidencial del 95% indica que existe la posibilidad de la no presencia del efecto de asimetría para el modelo EGARCH(1,1)-N.

Cuadro 2
Resultados de la estimación de parámetros para los modelos GARCH/EGARCH

Parámetro	Modelo		
	GARCH(1,1)-N	GARCH(1,1)-t	EGARCH(1,1)-N
α_0	0,109	0,065	0,014
	(0,089; 0,151)	(0,035; 0,094)	(0,002; 0,024)
α_1	0,231	0,158	-0,011
	(0,182; 0,280)	(0,110; 0,207)	(-0,033; 0,011)
β_1	0,671	0,791	0,910
	(0,612; 0,729)	(0,730; 0,851)	(0,887; 0,932)
Persistencia	0,902	0,948	0,910
	0,867; 0,936	(0,915; 0,982)	(0,887; 0,932)
h_0	1,034	1,033	3,651
	(1,008; 1,062)	(1,011; 1,054)	
ν	-	4,918	-
		(4,011; 5,818)	0,373
ϕ_1	-	-	(0,323; 0,424)

Se reporta la media posterior y entre paréntesis aparece el intervalo de credibilidad del 95%.

La figura 2 presenta las estimativas de la volatilidad en el tiempo comparada con el valor absoluto de los retornos. Se puede apreciar que existen ligeras diferencias entre las tres especificaciones consideradas, especialmente en los retornos de mayor absoluto.



Cuadro 3
Conjunto de retornos del IGBVL

Modelo	DIC	D	P _D
Garch(1,1)-N	6994,00	6990,99	3,12
Garch(1,1)-t	6771,57	6766,33	5,23
EGARCH(1,1)-N	6997,40	6993,80	3,58

Resultados del DIC para comparación de modelos.

La comparación de las tres especificaciones condicionada indica que el modelo GARCH(1,1)-t usando el criterio DIC (ver Meyer y Yu, 2000, para una revisión) es el modelo para los retornos del IGBVL analizado, pudiendo acomodar valores altos de y_t .

Conclusiones

Este artículo revisa avances en los métodos Bayesianos computarizados intensivamente que permiten estimar

de manera simple los parámetros de los modelos GARCH/EGARCH.

La comparación de diferentes especificaciones fue implementada con el criterio DIC, el cual es fácilmente calculado de las salidas de la muestra de MCMC.

Este artículo tiene ciertas contribuciones, pero otras aún son posibles. Por ejemplo, podrían considerarse distribuciones normales o *t-Student* asimétricas para los errores en (1).

Bibliografía

BAILLIE, R. T y T. BOLLERSLEV. (1989). "The message in daily exchange rates: a conditional variance-tale". En *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, 297-305.

BOLLERSLEV, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". En *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

_____ (1987). "A Conditionally Heteroskestic time series model for speculative prices and rate of return". En *The Review and Economics and Statistics*, 31, 301-327.

BOLLERSLEV, T., R. CHOW y K. KRONER. (1992). "ARCH modelling in finance: a review of the theory and empirical evidence". En *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.

BOLLERSLEV, T., R. ENGLE y D. NELSON. (1994). "ARCH models". En R. F. Engle y D. L. McFadden (eds.). *The Handbook of Econometrics* Vol. IV (pp. 2961-3038). North-Holland: Elsevier Science Publishers B.V.

COWLES, M. K. y B. P. CARLIN. (1996). "Markov Chain Monte Carlo convergence diagnostics: a comparative review". En *Journal of the American Statistical Association*, 91, 883-904.

ENGLE, R. (1982). "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation". En *Econometrica*, 50, 987-1007.

GAMERMAN, D. y H. F. LOPES. (2006). *Markov Chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. New York: Chapman & Hall, 2a. ed.

MEYER, R. y J. YU. (2000). "BUGS for Bayesian stochastic volatility models". *The Econometric Journal*, 45, 239-265.

NELSON, D. (1991). "Conditional heteroscedasticity in asset returns: a new approach". En *Econometrica*, 59, 347-370.

VRONTOS, I. D., P. DELLAPORTAS y D.N. POLITIS. (2000). "Full Bayesian inference for GARCH and EGARCH models". En *Journal of Business and Economic Statistics*, 18, 187-198.

* Instituto de Matemáticas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brazil. E-mail: cabantovalle@im.ufrj.br

