

INECUACIONES VARIACIONALES Y QUASIVARIACIONALES CON APLICACION A UN PROBLEMA DE FILTRACION A TRAVES DE UN DIQUE MALLADO CON ELEMENTOS FINITOS

VARIATIONAL AND VARIATIONAL INEQUATIONS APPLIED TO ONE PROBLEM OF FILTRATION TO CROSS OF ONE DIQUE SPLITTING WITH FINITE ELEMENTS

Irla Mantilla Núñez¹, Luís Roca Galindo²

RESUMEN

El comportamiento de la presión de un fluido que se filtra a través de la pared de un Dique, el cual se supone es de un material poroso, conduce al planteamiento de un problema de contorno que involucra ecuaciones en derivadas parciales bajo condiciones tipo Dirichlet y Neumann; en algunas fronteras mientras que en otra es desconocida, es decir, conduce a un problema de frontera libre. Para el caso que se considere la sección transversal de la pared de forma rectangular, el problema está asociado a una inecuación variacional y para secciones planas no rectangulares, se tiene un problema de frontera libre asociado a una inecuación quasivariacional. El estudio del primer caso está resuelto en la referencia [4]. En el presente trabajo hemos considerado el estudio numérico del segundo caso. Para resolver este problema, se le hace un tratamiento matemático utilizando la teoría de dualidad, luego; mediante el cálculo de iteraciones de punto fijo, tales que en cada iteración se tiene una inecuación variacional de segunda especie, donde la forma bilineal es no simétrica, pero que mediante un esquema propuesto de minimizar el número de iteraciones, se obtiene un problema equivalente de optimización, el cual, permite demostrar la existencia y unicidad de solución, bajo la condición de la existencia los puntos de silla. Entonces para hallar la solución, utilizamos el método de elementos finitos, con lo que finalmente se logra la simulación numérica del problema de filtración en Diques de base plana no rectangular.

Palabras clave: Inecuaciones varacionales y quasivacionales, Filtración en diques, Elementos finitos, Teoría de dualidad.

ABSTRACT

The behavior of the pressure of a fluid that filters through the wall of a Dike, which is supposed is of a porous material, it drives to the position of a contour problem that involves equations in having derived partial under you condition type Dirichlet and Neumann; in some frontiers while in another it is ignored, that is to say it drives to a problem of free frontier. For the case that is considered the section crosswise of the wall in a rectangular way the problem it is associated to an inequation variational and it stops sections plane non rectangu-homes, one has a problem of free frontier associated to an inequation quasivariational. The first case it is solved in the reference [4]. presently work has considered the numeric study of the second case. To solve this problem, we make a mathematical treatment using the theory of duality, then by means of the fixed, such calculation of point iterations that in each iteration one has an inequation

¹Magister, Docente e Investigadora del Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería, ²Licenciado, Docente e Investigador del Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería.

variational of second species, where the form bilinear is not symmetrical, but that by means of a proposed outline of minimizing the number of iterations, an equivalent problem of optimization is obtained, which allows to demonstrate the existence of unique solution, under the condition of the existence seat points. Then to find the solution, we use the method of finite elements, and finally the numeric simulation of the filtration problem is achieved in Dikes of base non rectangular.

Key words: Variational and quasivariational inequations, Filtration dikes, Finite elements, Dualite theory.

INTRODUCCION

En el presente trabajo se muestra una generalización del estudio realizado [2]. Para este caso, consideramos un liquido (agua) retenido en embalses con diferentes niveles de profundidad y separados por un Dique (Fig. 1), el cual, se filtra por gravedad, desde el nivel más alto hacia el nivel más bajo.

El problema consiste en determinar la presión del fluido, que implícitamente ejerce, definiendo una región húmeda y una región seca dentro de la pared.

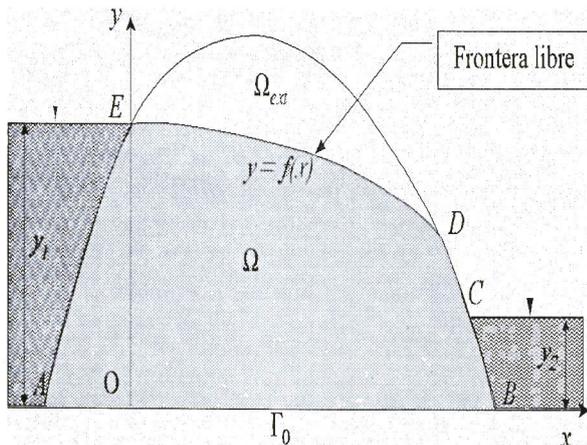


Fig. 1 Dique de forma generalizada.

DESCRIPCION DEL MODELO FISICO MATEMATICO

En esta sección formularemos el modelo físico matemático.

Se asume que el material de la pared del Dique es poroso, homogéneo e isotrópico. Así también que el fluido es incompresible, el flujo es laminar bidimensional, estacionario y con ausencia de evaporación y del fenómeno de capilaridad.

Caracterizaremos la geometría del dominio considerando la forma siguiente: a, b, c, y_1, y_2 son números reales tales que: $a < 0 < c < b$ $0 < y_2 < y_1$ y sea $Y \in C^3([a, b])$ una función cóncava con $Y(a) = Y(b) = 0, Y(0) = y_1, Y(c) = y_2$ y $Y(x) \geq 0$. Entonces la sección transversal de la pared del Dique estará dada por el conjunto:

$$D = \{(x, y) : x \in (a, b), y \in (0, Y(x))\} \quad (1)$$

Además definimos:

$$\Gamma_0 = \{(x, 0) : a < x < b\}$$

$$\Gamma = \{(x, Y(x)) : a < x < b\}$$

$$\Gamma_1 = \{(x, Y(x)) : a < x < 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, Y(x)) : c < x < b\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, Y(x)) : 0 < x < c\}$$

Observando la Fig. 2, se considera como y_1, y_2 las alturas de los embalses, la región ocupada por el dique será denotada por $D \subset \mathbb{R}^2$ encontramos dos regiones, una llamada Ω donde se concentra el fluido y otra llamada Ω_{ext} donde no tenemos presencia del fluido, ambas regiones están separadas por una frontera Γ_f descrita por una función continua f . La frontera Γ_0 es la base del dique, Γ_1 y Γ_2 separan al dique de los reservorios, Γ_3 denota la parte del dique que esta en contacto con la atmósfera, Γ_f es la llamada zona de filtración o drenaje.

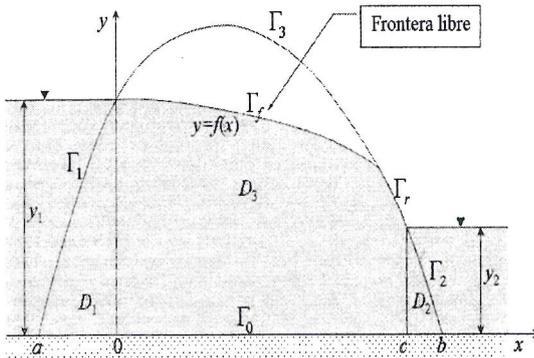


Fig. 1 Esquemización del dique.

Y definimos los siguientes subconjuntos

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in D : x \in (a, 0)\} \\ D_2 &= \{(x, y) \in D : x \in (c, b)\} \\ D_3 &= \{(x, y) \in D : x \in (0, c)\} \end{aligned} \quad (2)$$

La ecuación que gobierna el desplazamiento del fluido viene dada por la ley de Darcy:

$$\bar{q} = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho gy) \quad (3)$$

Donde \bar{q} es el vector velocidad del fluido, p es la presión, ρ es la densidad, μ es la viscosidad, k es el coeficiente de permeabilidad del medio (ρ , μ , k se consideran constantes) y suponemos que la ordenada y , es positiva.

Por la ley de conservación de la cantidad de masa y según las características asumidas para el fluido, se satisface la siguiente condición de continuidad:

$$\nabla \cdot \bar{q} = 0 \quad (4)$$

Si además consideramos el cambio de variables:

$$\bar{p} = \frac{k}{\mu} p, \quad \bar{y} = \frac{k\rho g}{\mu} y,$$

de modo tal que, en virtud de la ley de Darcy se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \nabla(\bar{p} + \bar{y}) \\ &= \Delta \bar{p} \end{aligned} \quad (5)$$

Se puede ver que \bar{p} satisface la ecuación de Laplace (5), esto es respecto a la zona húmeda considerada en Ω . Para simplificar la notación, en lo sucesivo simplemente para designar a las nuevas variables nos referiremos como p e y .

Hasta ahora hemos definido la presión en el interior de la zona húmeda, pero podemos extender p como nula en la zona seca. Con estas consideraciones para cumplir nuestro objetivo de simular numéricamente el comportamiento de filtración a través de la pared del Dique, plantaremos tres problemas:

Problema 1:

Encontrar (p, Ω) tal que

$$p \in C(\bar{D}) \cap H^1(D) \quad (6)$$

$$\Omega = \{(x, y) \in D : p(x, y) > 0\} \quad (7)$$

$$x \mapsto \int_b^{c(x)} \frac{\partial p}{\partial x} \text{ es no decreciente en } [0, c] \quad (8)$$

$$p \geq 0 \text{ en } \bar{D} \quad (9)$$

$$p > 0 \text{ en } \Gamma_0 \quad (10)$$

$$p = y_1 - y \text{ en } \Gamma_1 \quad (11)$$

$$p = y_2 - y \text{ en } \Gamma_2 \quad (12)$$

$$p = 0 \text{ en } \Gamma_3 \quad (13)$$

$$\forall \psi \in C_\Gamma : \int_\Omega \nabla(p + y) \cdot \nabla \psi \, dx dy = 0 \quad (14)$$

$$C_\Gamma = \{\psi \in C^\infty(\bar{D}) : \psi = 0, \text{ cerca de } \Gamma\} \quad (15)$$

PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE

El propósito en esta sección es reformular el problema anterior, extendiéndolo a todo el dominio D , ya que hasta ahora sólo tenemos información sobre Ω .

Tomando de [3], para $p \in C(\bar{D}) \cap H^1(D)$ introduce una función $U : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$U(x, y) = \int_0^y p(x, t) dt \quad (16)$$

La que permite establecer el problema de frontera libre [4], para U , al que nombramos como problema 2.

Problema 2:

Encontrar U tal que

$$U \in W^{2,r}(D), \forall r < +\infty \quad (17)$$

$$x \mapsto U(x, Y(x)) \text{ es convexa en } [0, c] \quad (18)$$

$$U_y \geq 0 \text{ en } \bar{D} \quad (19)$$

$$U = 0 \text{ en } \Gamma_0 \quad (20)$$

$$U_y = y_1 - y \text{ en } \Gamma_1 \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$U_y = y_2 - y \text{ en } \Gamma_2 \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$U_y = 0 \text{ en } \Gamma_3 \quad \dots\dots\dots(23)$$

Y definiendo el nuevo dominio geométrico [6].

$$\Omega = \{(x, y) \in D : U(x, y) < U(x, Y(x))\}.. \quad (24)$$

Se puede ver que

$$\Omega \text{ contiene una vecindad de } \Gamma_0 \quad (25)$$

$$-\Delta U = \chi_\Omega \text{ c.t.p. en } D \quad \dots\dots\dots (26)$$

Sean:

$M : L^1(D) \rightarrow L^1(D)$, un operador, tal que

$$(M(u))(x, y) = \begin{cases} u(x, y) + 1 & (x, y) \in D_1 \cup D_2 \\ \text{conv}[(u(x, Y(x)))]^+ & (x, y) \in D_3 \end{cases}$$

y la aplicación

$\text{conv} : L^1(]0, c[) \rightarrow L^1(]0, c[)$, definida por

$$(\text{conv } f)(x) = \{ \alpha x + \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha x + \beta \leq f(x) \text{ c.t.p. en }]0, c[\}$$

Entonces U es solución de la ecuación diferencial multivaluada:

$$-\Delta U \in \chi_{D_1} + \chi_{D_{12}} + \chi_{D_{32}} H(\text{conv}[\gamma_{03} U]^+ - U) \quad (27)$$

Si asumimos $f = \text{conv}[\gamma_{03} U]^+$, entonces la ecuación diferencial multivaluada

$$-\Delta U \in \chi_{D_1} + \chi_{D_2} + \chi_{D_3} H(f - U) \quad (28)$$

es equivalente a la inecuación variacional de segunda especie, asociada a una forma bilineal no simétrica [2, 6], establecida en el siguiente problema:

Problema 3:

Dado $f \in L^1(]0, c[)$ encontrar $u \in V$ tal que:

$$\begin{cases} a(u, v-u) + \int_{D_3} [f-v]^+ - \int_{D_3} [f-u]^+ \geq \\ \int_{D_1 \cup D_2} (v-u) + \int_{\Gamma} g(v-u) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (29)$$

donde

$$V = \{v \in H^1(D) : \gamma_0 v = 0 \text{ en } \Gamma_0\} \quad (30)$$

$$a(u, v) = \int_D [\nabla u \cdot \nabla v + (u_x v_y - u_y v_x) Y' - u_y v Y''] dx dy \quad (31)$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + Y'(x)^2} (y_1 - Y(x)) & \text{si } a < x < 0 \\ 0 & \text{si } a \leq x \leq c \\ \sqrt{1 + Y'(x)^2} (y_2 - Y(x)) & \text{si } c < x < b \end{cases} \quad (32)$$

Definimos $\tau : L^1(]0, c[) \rightarrow V$ como el operador tal que $\tau(f)$ es solución del problema 3, entonces, $U \in V$ es solución del problema 2, se puede establecer la igualdad.

$$\Theta(U) = U \tag{33}$$

El operador Θ satisface un problema de punto fijo:

$$\begin{aligned} \Theta : V &\rightarrow V \\ \Theta(v) &= \tau(\text{conv}[\gamma_{03}v]^+) \\ [\gamma_{03}v](x) &= v[x, Y(x)], \quad x \in]0, c[\end{aligned}$$

RESOLUCIÓN NUMÉRICA

Para obtener la solución de estos problemas, de modo aproximado, su construcción, se procederá a realizar por etapas:

Primera etapa

Dado el problema de punto fijo, se construyen dos sucesiones $\{U_n\}$ y $\{U^n\}$ [5] de funciones mediante las relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \tau(\text{conv}[\gamma_{03}U_n]^+) \quad n \geq 0 \\ U^{n+1} &= \tau(\text{conv}[\gamma_{03}U^n]^+) \quad n \geq 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Y luego iniciar las iteraciones, elegimos U_0 tal que satisfaga el siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V : \\ a(u, v) = \int_D Fv + \int_{\Gamma} gv \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{35}$$

donde: $F = \chi_{D_1 \cup D_2}$

De igual manera establecemos U^0 como solución del problema.

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V : \\ a(u, v) = \int_D Fv + \int_{\Gamma} gv \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{36}$$

para un $F \equiv 1$

Segunda etapa

Para calcular U^{n+1} y U_{n+1} , hay que resolver dos problemas respectivamente:

Problema 3a:

Dado $f = \text{conv}[\gamma_{03}U^n]^+$ encontrar $U^{n+1} \in V$, tal que $\forall v \in V$ se tiene:

$$\begin{cases} a(U^{n+1}, v - U^{n+1}) + \int_{D_3} [f - v]^+ \geq \int_{D_3} [f - U^{n+1}]^+ \\ + \int_{D_1 \cup D_2} (v - U^{n+1}) + \int_{\Gamma} g(v - U^{n+1}) \end{cases}$$

De igual manera para determinar U_{n+1} , se plantea el siguiente problema:

Problema 3b:

Dado $f = \text{conv}[\gamma_{03}U^n]^+$ encontrar $U_{n+1} \in V$ tal que $\forall v \in V$:

$$\begin{cases} a(U_{n+1}, v - u) + \int_{D_3} [f - v]^+ \geq \int_{D_3} [f - U_{n+1}]^+ \\ + \int_{D_1 \cup D_2} (v - U_{n+1}) + \int_{\Gamma} g(v - U_{n+1}) \end{cases}$$

Para resolver los problemas 3a y 3b, se propone utilizar el siguiente algoritmo [6]:

Algoritmo 1

Paso 1: Elegimos $u^0 \in V$

Paso 2: Para $n \geq 0$: conocido u^n , elegimos $u^{n+1} \in V$ que resuelva:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \text{ tales que:} \\ b(u, v - u) + m(v) - m(u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{37}$$

y para $\lambda > 0$, $m(v) = \lambda \int_{D_3} [f - v]^+$

$$b(u, v) = (u, v)$$

$$F(v) = (u^n, v) - \lambda a(u^n, v) + \lambda \left\{ \int_{D_1 \cup D_2} v + \int_{\Gamma} gv \right\}$$

Tercera etapa

Ahora para la solución de (37) hacer posible la determinación de u^{n+1} , se utiliza el siguiente algoritmo:

Algoritmo 2

i) Elegimos $q^0 \in L^2(D_3)$

ii) Para $i \geq 0$ hacemos: conocido q^i elegimos $u^i \in V$ que resuelva:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in V : \\ (u, v)_V - F(v) + \lambda(q^i, v)_{L^2(D_3)} = 0 \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (38)$$

iii) Y hacemos

$$q^{i+1} = \text{Pr}_K \cdot (q^i + \rho(u^i - f)) \quad (39)$$

donde $\rho > 0$ y

$$K^* = \{q \in L^2(D_3) : -1 \leq q \leq 0 \text{ c.t.p. en } D_3\}$$

Aproximación con el método de Galerkin y elementos finitos

Para hallar la solución, Consideramos como dominio computacional la región D y las subregiones D_1 , D_2 y D_3 , sobre las que se realiza una discretización con elementos finitos de forma triangular. Las triangulaciones son denotadas por: $\mathcal{S}_h(D)$, $\mathcal{S}_h(D_1)$, $\mathcal{S}_h(D_2)$ y $\mathcal{S}_h(D_3)$ respectivamente; satisfacen la siguiente condición:

$$\mathcal{S}_h(D) = \mathcal{S}_h(D_1) \cup \mathcal{S}_h(D_2) \cup \mathcal{S}_h(D_3) \quad (40)$$

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\sum_h = \{p \in \bar{D} : p \text{ es un vértice de algún } T \in \mathcal{S}_h\}$$

$$\overset{\circ}{\sum}_h = \{p \in \sum_h : p \notin \Gamma_0\}$$

$$\sum_h^{D_3} = \sum_h \cap \bar{D}_3$$

Sean P_1 , el espacio de polinomios de grado 1 y X_h el espacio de polinomios a trozos:

$$X_h = \{v_h \in C(\bar{D}) : v_h|_T \in P_1, \quad \forall T \in \mathcal{S}_h(D)\}$$

Ahora buscamos el espacio de aproximación V_h de V de la forma:

$$V_h = \{v_h \in X_h : v_h|_{\Gamma_0} \equiv 0\}$$

y el espacio de aproximación W_h de $L^2(D_3)$ de la forma:

$$W_h = \{v_h|_{\bar{D}_3} : v_h \in X_h\}$$

Es claro que V_h y W_h son finito dimensionales y que $\dim(V_h) = \text{card}(\overset{\circ}{\sum}_h)$ y

$$\dim(W_h) = \text{card}(\sum_h^{D_3}).$$

Sea $B = \{b_1, \dots, b_{N_h}\}$ un conjunto de funciones, tales que:

$$b_i \in C(\bar{D}), b_i|_T \in P_1, \quad \forall T \in \mathcal{S}_h(D) \quad b_i(p_j) = \delta_{i,j}$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad p_j \in \overset{\circ}{\sum}_h$$

$$b_i(p_j) = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \{N+1, \dots, N_h\} \quad p_j \in \sum_h \cap \Gamma_0$$

$$\text{Donde: } N_h = \text{card}(\sum_h), \quad N = \text{card}(\overset{\circ}{\sum}_h)$$

Denotemos por $L = \text{card}(\sum_h^{D_3})$, entonces el conjunto $\{b_j : 1 \leq j \leq N\}$, constituye una base para V_h , y se puede ver que existe un conjunto $\{c_j : 1 \leq j \leq L\} \subset B$ que es una base para W_h . [1]. Entonces utilizando el método de Galerkin, podemos suponer que existe $q_h \in W_h$ y $v_h \in V_h$, tales que:

$$q_h = \sum_{j=1}^L q_j c_j \quad (41)$$

$$v_h = \sum_{j=1}^N v_j b_j \quad (42)$$

Los coeficientes q_j y v_j se denominan valores nodales y forman vectores de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [q_1, \dots, q_L] \\ \mathbf{u} &= [u_1, \dots, u_N] \end{aligned} \quad (43)$$

que satisfacen las expresiones (38) y (39), ya que $V_h \subset V$ y $W_h \subset L^2(D_3)$, obteniéndose los siguientes problemas discretos, en dimensión finita:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N : \\ \sum_{j=1}^N u_j (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) + \lambda \sum_{j=1}^L q_j' (\mathbf{c}_j, \mathbf{b}_k)_{L^2(D_3)} = \sum_{j=1}^N u_j^n (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) \\ - \lambda \sum_{j=1}^N u_j^n a(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) + \lambda L(\mathbf{b}_k) \quad \forall k \in \{1, \dots, N\} \end{array} \right. \quad (44)$$

Consideremos las matrices, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{N \times L}$ y el vector $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^N$, donde:

$$\mathbf{K}_{jk} = a(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j)$$

$$\mathbf{M}_{jk} = (\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_j)$$

$$\mathbf{L}_{jk} = (\mathbf{b}_k, \mathbf{c}_j)_{L^2(D_3)}$$

$$\mathbf{F}_j = L(\mathbf{b}_j)$$

luego, el problema (44) se reduce a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N : \\ \mathbf{M}\mathbf{u} + \lambda \mathbf{L}\mathbf{q}' = \mathbf{M}\mathbf{u}^n - \lambda \mathbf{K}\mathbf{u}^n + \lambda \mathbf{F} \end{array} \right. \quad (45)$$

De igual manera (39) puede escribirse como:

$$\mathbf{q}^{i+1} = \text{Pr}_{K_h^*}(\mathbf{q}^i + \rho(\mathbf{u}^i - \mathbf{f})) \quad (46)$$

$$K_h^* = [-1; 0] \subset \mathbb{R}^L$$

Algoritmo de solución del problema totalmente discreto

Datos de entrada: \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{L} , \mathbf{F} , \mathbf{q}^0 , λ , ρ , n_{\max} , k_{\max} , i_{\max} , tol

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$$

Repetir desde $n=0$ hasta n_{\max}

$$\mathbf{f} = \text{conv}[\gamma_{03} \mathbf{U}^n]$$

Repetir desde $k=0$ hasta k_{\max}

Repetir desde $i=0$ hasta i_{\max}

$$\mathbf{v}^{i+1} = \mathbf{u}^k + \lambda \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{u}^k - \mathbf{L}\mathbf{q}^i)$$

$$\mathbf{q}^{i+1} = \text{Pr}_{[-1,0]^L}(\mathbf{q}^i + \rho(\mathbf{v}^{i+1} - \mathbf{f}))$$

Si $\|\mathbf{v}^{i+1} - \mathbf{v}^i\| < \text{tol}$ Entonces

Salir

Fin_Si

Fin_Repetir

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{v}^{i+1}$$

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}^{i+1}$$

Si $\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\| < \text{tol}$ Entonces

Salir

Fin_Si

Fin_Repetir

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{u}^{k+1}$$

Si $\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n\| < \text{tol}$ Entonces

Salir

Fin_Si

Fin_Repetir

Variables de salida: \mathbf{U}^{n+1}

VISUALIZACION DE LOS RESULTADOS

Para obtener una visualización de los resultados, consideremos un problema particular constituido por los siguientes datos de entrada: Una región de base plana, que representa la sección transversal del dique la cual está formada superiormente por la curva $Y(x) = -(x-1)^2 + 4$ y las siguientes dimensiones geométricas:

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = 1$$

$$a = -1$$

$$b = 3$$

$$c = \sqrt{3} + 1$$

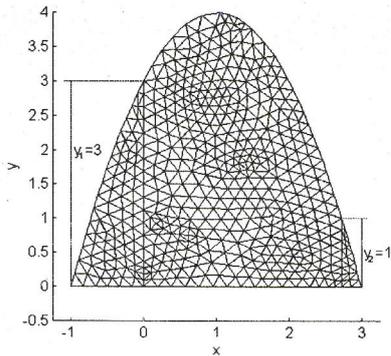


Fig. 3 Discretización del dominio con una malla de 924 elementos triangulares.

Para iniciar el algoritmo hacemos uso de los siguientes parámetros:

$$q^0 \equiv -1$$

$$\lambda = 40$$

$$\rho = 1000$$

$$nmax = kmax = imax = 50$$

$$tol = 0,01$$

Para aproximar el comportamiento de la frontera libre, utilizamos la siguiente información, inicial

$$q^0 = \begin{cases} 0 & \text{en la zona seca} \\ -1 & \text{en la zona húmeda} \end{cases}$$

Como se puede apreciar, el comportamiento de q^i , Fig. 4, la cual, es utilizada en la simulación de la zona de filtración, Fig. 5.

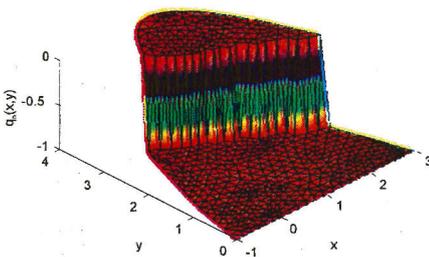


Fig. 4 Representación aproximada de q^i , asociado a la solución del problema Quasivariacional.

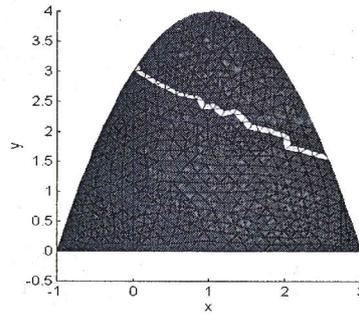


Fig. 5 Aproximación de la frontera libre y la zona de filtración.

Podemos usar (16) para recuperar la información relativa a la presión, mediante la relación

$$p(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \quad (47)$$

La presión en el interior de la pared del Dique, son mostrados en la Fig. 6. Finalmente, se puede observar el campo de velocidades del fluido, Fig. 7, calculado a partir de la expresión (3).

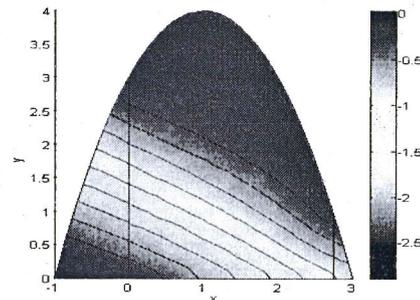


Fig. 6 Curvas de nivel para la presión al interior del dique de sección transversal generalizada.

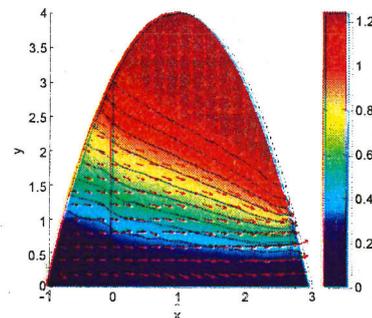


Fig. 7 Campo de velocidades asociado a la presión al interior del dique.

CONCLUSIONES

Se ha formulado una expresión matemática apropiada para modelar el comportamiento de un fluido a través de un medio poroso de forma geométrica general, obteniéndose con aproximación suficiente tanto la presión como el campo de velocidades.

La técnica matemática propuesta es extensible al tratamiento de otros problemas que involucren inecuaciones quasivariacionales del tipo (23).

REFERENCIAS

1. **Brenner, S. C.**, "The mathematical theory of finite element method", Springer Verlag, 1991. **IVAR EKELAND**, Convex analysis and Variational Problems, North-Holland, 1976.
2. **Baiocchi, C.**, "Variational and quasivariational inequalities", John Wiley & Sons, 1986.
3. **Mantilla N., I.**, "Generación de un mallado óptimo para la resolución numérica de problemas de contorno mediante elementos finitos", TECNIA Vol. 10, pp. 1999.
4. **Mantilla N, I., Roca Galindo, L.**, "Estudio numérico de la solución para el problema del dique", TECNIA Vol. 13, pp. 2003.
5. **Glowinski, R.**, "Finite elements and variational inequalities, technical report, INF-LAB 78010, INRIA-Laboria, Rocquencourt, 1978.
6. **Roca Galindo, L.**, "Utilización de la teoría de dualidad en la solución de inecuaciones variacionales y quasivariacionales mediante el método de elementos finitos", Tesis, 2005

Correspondencia: irlamn@uni.edu.pe

Recepción de originales: Setiembre 2005
Aceptación de originales: Noviembre 2005

