

## ESTUDIO DE LA RESISTENCIA DEL ÁLABE DE UNA TURBINA A GAS AERONAUTICA

### STUDY OF THE STRENGTH OF THE BLADE OF AIRCRAFT TURBINE

Ubaldo Yancachajlla Tito<sup>1</sup>

#### RESUMEN

*El trabajo consiste en demostrar la posible utilización de los métodos de los elementos finitos para el caso de cálculo de un alabe de una turbina de avión por el método de los elementos finitos. En primer lugar, hallamos los esfuerzos críticos en el alabe debido a las sollicitaciones de la fuerza centrífuga y los gasodinámicas, estas generan esfuerzos de tracción y flexión principalmente. Comparando estos resultados con los obtenidos anteriormente por métodos tradicionales, llegando a validar nuestros resultados por el método de los elementos finitos. Finalmente hallaremos los modos de vibrar y frecuencias naturales del alabe de la turbina, llegando a conclusiones que concuerdan a los publicados en la literatura. El método de los elementos finitos representa una poderosa herramienta que puede ser utilizada satisfactoriamente para la optimización de los diseños complejos tales como de la turbina.*

*Palabras clave.-* Alabe, Deformación, Turbina, Esfuerzo, Vibración.

#### ABSTRACT

*The work consists of demonstrating the possible utilization of the methods of the finite elements for the case of calculation of a blade of a turbine of plane by the method of the finite elements, first we find the critical stress in the blade due to the sollicitations of the centrifugal force and the gas-dynamics, these generate stress of traction and flexion principally. Comparing these results with the obtained ones previously for traditional methods, managing to validate our results for the method of the finite elements. Finally we will find the manners of vibrating and natural frequencies of the blade of the turbine, coming to conclusions that they reconcile to the published ones in the literature. The method of the finite elements represents a powerful tool that can be used satisfactorily for the optimization of the such complex designs as of the turbine.*

*Key words:* Blade, Strain, Turbine, Stress, Vibration.

#### INTRODUCCION

El método de los elementos finitos de análisis ingenieril es relativamente nuevo, ya que sus inicios fueron en el año de 1941, donde Hrenikoff presentó una solución de problemas de elasticidad usando el método denominado "frame work", en 1943 aparece Courant con trabajos realizados en interpolaciones lineales basado en subregiones triangulares para modelar problemas de torsión,

después a mediados de los años 50, aparece Turner desarrollando matrices de rigidez para la solución de problemas de elasticidad en barras y vigas entre otros elementos; con grandes logros y siguiendo los pasos de Turner, las Corporaciones MacNeal-Schwendler and Computer Sciences elaboraron en la NASA el primer código de importancia para el análisis de elementos finitos, llamado NASTRAN, y fue usado en la industria aeroespacial aunque también tuvo otras aplicaciones en áreas de la

---

<sup>1</sup>Egresado de la Maestría de Diseño de Máquinas de la Facultad de Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería, Docente de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

ingeniería civil, como el análisis de estructuras; pero no fue hasta 1960 cuando Clough, utilizó por primera vez el término de elemento finito y en 1967 fue publicado el primer libro de elemento finito por Zienkiewicz y Chung. Fueron muchos los desarrollos, trabajos, investigaciones, experimentos, análisis e inversiones de tiempo y dinero para poder tener en el método de los elementos finitos, una poderosa herramienta de trabajo, los avances fueron ascendiendo hasta poder tener resultados tangibles, tales como los realizados en el Apolo.

Con los grandes avances tecnológicos que se han logrado en el área de la computación y sobre todo en los sistemas de diseño asistido por computadora, ahora es relativamente más fácil la modelación de prototipos, en los cuales, podemos tener geometrías y superficies complicadas e irregulares, aplicaciones de cargas en forma específica para el estudio preciso de los esfuerzos internos y tener una modelación ajustada a los perfiles y estructuras que se emplean teniendo en consideración ciertas características como el cambio de secciones, estructuras huecas, con pared delgada y con características en secciones transversales muy específicas. Para poder tener una solución aceptable tomando en consideración los aspectos antes mencionados, al igual que las características de los materiales, es necesario la aplicación de métodos numéricos capaces de dar soluciones a ecuaciones ordinarias o parciales, para poder establecer una ecuación analítica válida a lo largo de todo el elemento de estudio, y es por ello que para poder establecer parámetros específicos y precisos, se necesita de la aplicación del método de elementos finitos.

### Fundamentos de los elementos finitos.

El método de los elementos finitos puede llegar a ser un método matemático muy complejo, ya que uno de sus fundamentos está basado en la discretización de los cuerpos de estudio, y debido a la existencia de muchas divisiones se debe realizar una o más ecuaciones para representar el comportamiento de cada división del cuerpo. Para poder emplear este método debemos hacer ciertas asunciones, tales como:

1. Una función continua bajo un dominio global, puede aproximarse por una serie de funciones operando bajo un número finito de pequeños subdominios, éstas series de funciones son continuas y pueden aproximarse a la solución exacta, así como el número de subdominios se aproxima infinitamente a la pieza de estudio.
2. El dominio global del cuerpo está dividido, en subdominios llamados *elementos*.
3. Los puntos que definen las uniones y conexiones entre los elementos son llamados *odos o puntos nodales*.
4. Los elementos son especificados como uniones en sus nodos comunes, y son asumidos de esta manera para ser agrupaciones continuas a lo largo de sus fronteras, y cualquier función que represente el comportamiento de este nodo, es asumida para ser igualmente continua en las fronteras.
5. La función que existe bajo el dominio, es resuelta explícitamente para los puntos nodales. Se asume que el valor de la función en cualquier punto interno puede ser definido en términos de variables nodales del elemento de estudio.
6. Las variables nodales se refieren a los grados de libertad y estos son: 3 de desplazamiento y 3 rotaciones para el sistema de coordenadas cartesianas y éste término, es aplicado específicamente para el análisis de esfuerzo, en el cual, las variables nodales son deflexiones sufridas por la estructura en los puntos nodales.
7. La colección completa de elementos representa una aproximación a los dominios de la geometría, y con ello tener una gran exactitud de la pieza de estudio.
8. Los puntos nodales se refieren a puntos para una evaluación de la función, y no representan físicamente puntos de conexión en el dominio [1].

### CÁLCULO DE LA RESISTENCIA DEL ÁLABE

Las exigencias de resistencia representan una elección óptima de las áreas del corte del Álabes en la raíz  $F_K$  y el exterior  $F_B$ , y también su relación para la obtención de tensiones permisibles en tensión y flexión. La relación  $F_K/F_B$  para los álabes de compresores que trabajan en la zona subsónica es 1,5... 3 (menor relación podría ser en las últimas etapas durante una gran compresión). Para los álabes de compresor que trabajan a una velocidad mayor que la del sonido es 2...4 y para los álabes de Turbina 3...5.

Proveer la resistencia a la vibración del álabes escogiendo dimensiones, masa y la distribución de rigidez del álabes por su longitud y también seleccionando el número de álabes trabajadoras (rotores) y conductoras en las distintas etapas.

### LOS ESFUERZOS QUE ACTÚAN EN LOS ÁLABES [2]

Durante el trabajo del motor en el álabes de un compresor axial y una turbina, surgen esfuerzos de:

- Tensión de las fuerzas centrífugas de la masa del mismo álabes.
- Flexión por causa de los gases durante su movimiento de él por los canales entre los álabes.
- Flexión de las fuerzas centrífugas de la masa del álabes, por causa de que el centro de gravedad de la sección del álabes no se encuentra en un mismo radio.
- Torsión de las fuerzas centrífugas de la masa del álabes.
- Torsión de las fuerzas gasodinámicas, que actúan sobre el álabes. [4].

Todas estas fuerzas son estáticas.

Durante la oscilación del álabes surgen adicionalmente esfuerzos por vibración de flexión y torsión. En los álabes con el cuerpo torcido surgen una interacción de distintos tipos de deformación (la influencia de los esfuerzos de tensión o compresión en el torcimiento y al revés). Así por ejemplo, en los extremos del álabes con gran torcimiento puede presentarse esfuerzos de compresión de las fuerzas centrífugas. Determinando para cualquier corte cada uno de éstos esfuerzos, se puede hallar la tensión total en el punto más crítico del corte elegido. Generalmente, el esfuerzo se encuentra en el corte de la raíz, viendo el álabes como una viga rígidamente empotrado en el disco.

Los cálculos de los esfuerzos de los álabes en los compresores axiales y en las turbinas se realizan con los mismos métodos. Los esfuerzos permisibles por causa de que se utilizan distintos materiales serán distintos. Los álabes de la turbina se construyen de aceros y aleaciones resistentes a altas temperaturas. Los álabes del compresor se construyen de

aleaciones de aluminio, titanio, de plástico de vidrio (si la temperatura lo permite) y de acero.

Para las primeras etapas del compresor y las últimas etapas de la turbina, generalmente los valores mayores son los esfuerzos de tensión por las fuerzas centrífugas.

En los álabes cortos de las últimas etapas del compresor y la primera etapa de la turbina, el más grande esfuerzo es el de Flexión.

Los esfuerzos de Flexión de las fuerzas de los gases y centrífugas, son necesarios verlas por separado, ya que la tensión de Flexión de las fuerzas gáscas a veces se toma en calidad de un criterio para calcular los esfuerzos que surgen durante la vibración del álabes. Los esfuerzos de Torsión de las fuerzas gáscas e inerciales no es grande y durante su cálculo del álabes a la resistencia, generalmente no se consideran. Estos esfuerzos son hallados solamente para cálculos más exactos.

Para determinar las tensiones, los cálculos se hacen para el régimen de trabajo del motor en los RPM máximos. Para los motores actuales, el régimen de cálculo no sólo es el banco de pruebas, sino el de vuelo, ya que en el vuelo puede cambiar de manera significativa las RPM y el flujo de aire a través del motor. Las fuerzas gáscas cambian aproximadamente en forma proporcional al cambio de flujo de aire, por eso es razonable realizar el cálculo a la resistencia en los regímenes peligrosos para el álabes, tales regímenes representan:

- Régimen con flujo máximo de aire a través del motor durante RPM máximos, durante el vuelo con velocidad máxima en la tierra y durante temperaturas bajas del Aire (- 60°C).
- Régimen con flujo mínimo de aire con RPM máximos, durante el vuelo, a una altura correspondiendo al techo del Avión.
- Régimen con una gran temperatura del Aire en la entrada al motor, durante las RPM máximos.

Si en las condiciones del banco de pruebas los esfuerzos de flexión en los álabes de las fuerzas gasodinámicas son compensados, es decir, se reducen contrariamente en signo a los esfuerzos de flexión de las fuerzas centrífugas que serán vistos más

adelante, entonces, durante el vuelo con velocidad máxima en la tierra durante temperaturas bajas del aire, los álabes serán cargados en una cantidad mayor de tensiones de flexión de las fuerzas gasodinámicas. Durante el vuelo del avión en el techo, los álabes serán cargados en una cantidad mayor de esfuerzos de flexión de las fuerzas centrífugas. Tal cambio de esfuerzos particularmente son peligrosos para álabes de compresoras axiales, ya que los esfuerzos de flexión en ellos, es mayor que en los álabes de las turbinas gálicas.

Los cálculos muestran que para el álabe de la primera etapa del compresor axial durante el vuelo con velocidad 850 Km/h los esfuerzos de flexión son mayores que en las condiciones de banco en 60% y conforma durante esto, cerca del 45% del esfuerzo de tensión. El régimen para el cual es razonable proveer el mayor nivel de compensación de los esfuerzos de flexión, son puestos después de hacer todos los cálculos. La elección del nivel de compensación de los esfuerzos es determinado por el tipo de motor. A menudo se toma en cuenta la compensación de la flexión para el régimen de trabajo del motor en el banco de pruebas ( $V=0, h=0$ ), durante las RPM máximos.

Durante el cálculo del álabe a la resistencia se utiliza el sistema cartesiano  $R, x, y$ . El eje "R" es perpendicular al eje de giro y pasa por el centro de masa del corte de la raíz del álabe. Su parte positiva con el eje de giro es dirigida en dirección del aire (gases). El eje "y" es perpendicular al plano ROX y es dirigida de tal manera que durante un giro en dirección de giro del álabe, su parte positiva se une con la parte positiva del eje R.

En la Fig. 1 el sistema tomado, es cuando el giro del disco es en contra de las agujas del reloj si uno mira al motor del lado tobera (como dicen las normas).

Introducimos las siguientes designaciones para las dimensiones del álabe y otras magnitudes que se utilizan en el cálculo a la resistencia.

- $R_1, R_2, R_{cp}$  - Radios de los cortes del álabe de la parte de la raíz, externo y media.
- $R$  - Radio intermedio.
- $l_n$  - Longitud completa del álabe.
- $l$  - Coordenada intermedia a lo largo del

eje del álabe.

- $F_B, F_K$  - Área del corte externo y de la raíz.
- $Z$  - Número de álabes.
- $n, \omega$  - Frecuencia y velocidad angular de giro.
- $\sigma_p, \sigma_u$  - Esfuerzos de tensión y flexión en el álabe.
- $\rho$  - Densidad del material del álabe.

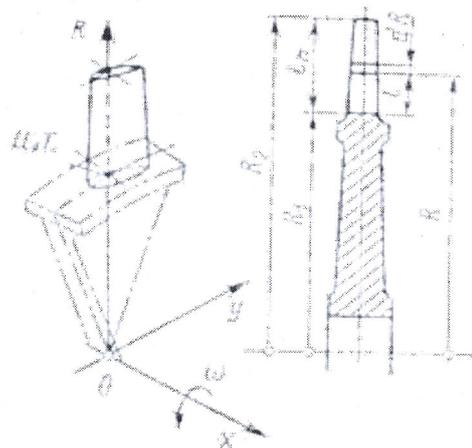


Fig. 1 Esquema del sistema de coordenadas asumido y nomenclatura durante el cálculo de la resistencia del álabe [3].

### ESFUERZOS DE TRACCION DE LAS FUERZAS CENTRÍFUGAS

Designamos el área del corte transversal del álabe que se encuentra a una distancia  $R$  del eje de giro por  $F$ . Entonces, la fuerza centrífuga del infinitésimo elemento de álabe será:

$$dP = \rho \omega^2 FRdR \quad (1)$$

La fuerza centrífuga de la parte del álabe de radio  $R$  hasta el extremo entonces la fuerza centrífuga es:

$$P = \rho \omega^2 \int_R^{R_2} FRdR \quad (2)$$

Si el área de la sección transversal del álabe es  $F$  constante por su altura, entonces la fuerza centrífuga es:

$$P = \rho \omega^2 F \frac{R_2^2 - R^2}{2}$$

Y las tensiones de tracción en la sección, que se encuentran a una distancia  $R$  del eje de rotación es:

$$\sigma_P = \frac{P}{F} = \rho \omega^2 \frac{R_2^2 - R^2}{2}$$

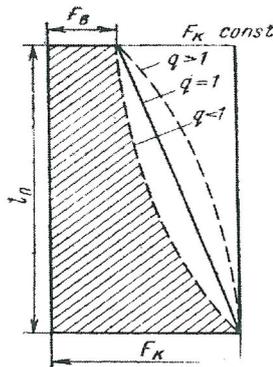
Por lo tanto  $\sigma_P$  no depende del área de sección constante y cambia por la longitud del álabe que depende de una parábola cuadrática. El esfuerzo de tracción se obtiene en la sección de la raíz.

$$\sigma_{PK} = \rho \omega^2 \frac{R_2^2 - R^2}{2} = \rho \omega^2 l_n R_{cp} \quad (3)$$

Donde 
$$R_{cp} = \frac{R_2 + R_1}{2}$$

Los álbes con sección transversal constante a lo largo de su altura por sus grandes velocidades casi no se utiliza (a menudo se utiliza en los compresores de bajas velocidades). Para bajar, los esfuerzos, el álabe se hace con el área de la sección transversal que se reduce por su altura.

El cambio del área de la sección durante distintas formas de perfilamiento se da en la Fig. 2.



**Fig. 2** Cambio del área de la sección transversal por la longitud del álabe durante distintas funciones de Perfilamiento [2].

Si el área de la sección transversal cambia de acuerdo a la función:

$$F = F_K - a l^q$$

Donde  $a$ -coeficiente de proporcionalidad;  $q$ -algún índice de grado, entonces la fuerza centrífuga elemental es:

$$dP = \rho \omega^2 (F_K - a l^q) (R_1 + l) dl$$

La fuerza centrífuga completa del álabe es:

$$P = \rho \omega^2 \int_0^{l_n} \rho \omega^2 (F_K - a l^q) (R_1 + l) dl$$

$$= \rho \omega^2 \left[ F_K l_n R_{cp} - a l_n^{q+1} \left( \frac{R_1}{q+1} + \frac{l_n}{q+2} \right) \right]$$

Para los álbes de los compresores axiales se toma la función lineal, tomando  $q=1$ , o de grado  $q=0.5 \dots 0.6$ . Para los álbes de las turbinas siempre se toma  $q=0.5 \dots 0.6$ .

En el caso particular de  $q=1$  la formula anterior se simplifica.

$$P = \rho \omega^2 \left[ F_K l_n R_{cp} - a l_n^2 \left( \frac{R_1}{2} + \frac{l_n}{3} \right) \right]$$

Reemplazando aquí el valor de  $a = \frac{(F_K - F_B)}{l_n}$ , tenemos:

$$P = \rho \omega^2 \left[ F_K l_n R_{cp} - (F_K - F_B) l_n \left( \frac{R_1}{2} + \frac{l_n}{3} \right) \right]$$

$$= \rho \omega^2 F_K l_n R_{cp} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_B}{F_K} \right) \left( \frac{R_1}{2 R_{cp}} + \frac{l_n}{3 R_{cp}} \right) \right]$$

Teniendo en cuenta que  $R_{cp} = \frac{R_1 + R_2}{2}$ ; y

considerando que  $R_{cp}^2 \omega^2 = u^2$

$$P = \rho F_K u^2 \frac{l_n}{R_{cp}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_B}{F_K} \right) \left( \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} + \frac{l_n}{3 R_{cp}} \right) \right]$$

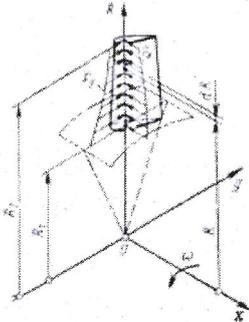
El esfuerzo de tracción en la raíz será:

$$G_{PK} = \rho u^2 \frac{l_n}{R_{cp}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_B}{F_K} \right) \left( \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} + \frac{l_n}{3 R_{cp}} \right) \right]$$

**MOMENTOS FLECTORES DE LAS FUERZAS GASODINÁMICAS**

Los momentos flectores de la reacción del gas durante su movimiento por los canales de entre álabes y de la diferencia de presiones antes y después del álabe, pueden ser determinados de la siguiente manera:

Si los componentes de las fuerzas gasodinámicas, que actúan en una unidad de longitud de álabe, que actúa en las direcciones de los ejes x, y; representamos a través de  $P_x, P_y$  (Fig. 3) entonces en elemento del álabe de longitud  $dR$  actuará una fuerza  $P_x dR$  y  $P_y dR$ , estas fuerzas para la sección de la raíz forman momentos flectores elementales en el plano de giro  $dM_{P_x} = P_y (R - R_1) dR$  y en el plano axial  $dM_{P_y} = P_x (R - R_1) dR$ . Integrando estas expresiones entre los límites, obtenemos los momentos flectores completos en la sección de la raíz.



**Fig. 3** Esquema de acción en el álabe de los componentes de las fuerzas gasodinámicas.

$$M_{P_x} = \int_R^{R_2} P_y (R - R_1) dR$$

$$M_{P_y} = \int_R^{R_2} P_x (R - R_1) dR$$

Los componentes de las fuerzas gasicas  $P_x$  y  $P_y$  se determina por la formula

$$P_x = \frac{2\pi R}{z} [(P_1 - P_2) + (c_{1a}^2 \rho_1 - c_{2a}^2 \rho_2)]$$

$$P_y = \frac{2\pi R}{z} [c_{1a} \rho_1 (c_{1u} - u) + c_{2a} \rho_2 (c_{2u} - u)]$$

Donde

- P - presión del gas
- $\rho$  - densidad del gas antes y después del álabe
- $c_a, c_u$  - componente axial y tangencial de la velocidad del gas
- u - velocidad tangencial del giro
- z - numero de álabes

Todos estos valores se relacionan a un valor intermedio de radio R. los índices 1 y 2 significan entrada y salida del canal (escalón).

Durante cálculos aproximados se puede tomar una fuerza distribuida a lo largo de constante e igual a la intensidad de la carga en el corte de álabe en el radio medio.

$$P_x = \pi \frac{R_2 + R_1}{z} (P'_1 - P'_2) + \frac{m_r}{z} \frac{(C'_{1a} - C'_{2a})}{(R_2 - R_1)}$$

El momento flector en el plano perpendicular al eje x y que pasa por el eje de la sección transversal, que se ubica a una distancia R del eje de rotación, cuando  $P_x = \text{const.}$  será:

$$M_{P_y} = P_x \frac{(R_2 - R_1)^2}{2}$$

El valor máximo del momento flector será:

$$M_{P_y \text{ max}} = P_x \frac{(R_2 - R_1)^2}{2} = P_x \frac{l_n^2}{2}$$

$P_y$  - en la longitud del álabe se determina por la formula

$$P_y = \frac{m_r}{l_n z} (C'_{1u} - C'_{2u})$$

$m_r$  - masa de los gases

$C'_{1u}, C'_{2u}$  - componentes absolutas de la velocidad tangencial (circular) tomados en la parte media de la altura del álabe o

$$P_y = 97500 \frac{N}{n z l_n R_{cp}}$$

El momento flector en el plano de giro para un valor intermedio R cuando  $P_y$  es constante

$$M_{Px} = P_y \frac{(R_2 - R_1)^2}{2}$$

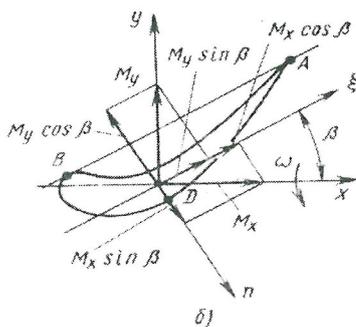
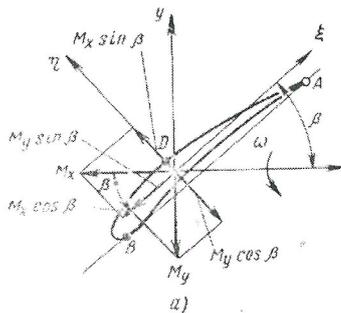
El valor máximo de este momento en la sección de la raíz

$$M_{Px \max} = P_y \frac{(R_2 - R_1)^2}{2} = P_y \frac{l_n^2}{2}$$

**Momentos flectores por fuerzas centrífugas.**- Si el centro de gravedad del corte del álabe no se encuentra en un mismo radio, que pasa por el centro de gravedad del corte de la raíz, entonces las fuerzas centrífugas no solamente crean tracción, si no flexión.

**ESFUERZOS DE FLEXIÓN EN LOS ÁLABES**

Para la determinación de los esfuerzos de flexión de las fuerzas centrífugas y gasodinámicas es necesario hallar los momentos de resistencia a la flexión. Ellos se hallan dividiendo el momento de inercia entre las coordenadas del punto, ya que el punto A, (Fig. 4) con coordenadas  $\eta_A \xi_A$ , tienen los componentes de momento de resistencia a la flexión.



**Fig. 4** Esquema para la determinación de los componentes de los momentos flectores, en relación a los principales ejes de inercia de la sección del álabe [2].

$$W_{\xi} = \frac{J_{\xi}}{\eta_A}$$

$$W_{\eta} = \frac{J_{\eta}}{\xi_A}$$

Los esfuerzos máximos de flexión generalmente se ubican en los puntos mas alejados de los ejes principales de inercia A, B, D; (Fig. 4) con sus coordenadas  $\xi_A \xi_B \xi_D \cdot \eta_A \eta_B \eta_D$ .

Los esfuerzos de flexión en los puntos A, B, D, se determinan por separado de las fuerzas gasodinámicas y centrífugas.

Para el punto A, por ejemplo, los esfuerzos de las fuerzas gasodinámicas es:

$$\sigma_{fPA} = \frac{M_{p\xi}\eta_A}{J_{\xi}} + \frac{M_{p\eta}\xi_A}{J_{\eta}}$$

y de las fuerzas centrífugas

$$\sigma_{fjA} = - \frac{M_{j\xi}\eta_A}{J_{\xi}} - \frac{M_{j\eta}\xi_A}{J_{\eta}} \tag{4}$$

El esfuerzo total en el punto A de la sección transversal del álabe se puede representar como la suma de los esfuerzos, flector y de tracción.

$$\sigma_{\Sigma A} = \sigma_{fPA} + \sigma_{fjA} + \sigma_A$$

Para los esfuerzo en otros puntos (B y D) pueden ser escritos en forma análoga.

Los esfuerzos totales máximos se alcanzan, en los compresores axiales de acero 300...350 MPa, para álabes de aluminio 150...230 MPa, para álabes de titanio 200....250 MPa, para álabes de la turbina 170...350 MPa.

El coeficiente de seguridad de resistencia a la longevidad en el lugar más cargado de la sección por los esfuerzos totales es [4]:

$$k = \frac{\sigma_a}{\sigma_{\Sigma}}$$

Donde  $\sigma_a$  - resistencia a la longevidad del material durante las condiciones de temperatura máxima;  $\sigma_{\Sigma}$  - los esfuerzos totales.

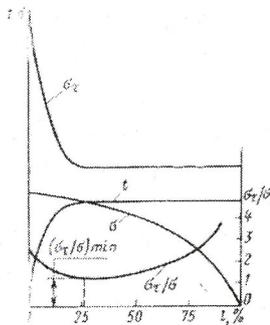
**PARTICULARIDADES DEL CALCULO A LA RESISTENCIA DE ALABES DE TURBINA [5]**

El cálculo a la resistencia de los álabes de la turbina se realiza por las formulas expresadas anteriormente. El esfuerzo permisible se elige de las condiciones de trabajo del material durante altas temperaturas teniendo en cuenta la fluencia y la resistencia a la longevidad. La sección crítica del álabe de la turbina se determina teniendo en cuenta los cambios de temperatura del álabe por su longitud  $t = f(l)$  el cambio de la resistencia de longevidad del material en dependencia de la temperatura  $t$  y tiempo de longevidad de trabajo en horas  $\tau$ .

$$\sigma_{\tau} = f_1(t, \tau)$$

También el cambio de los esfuerzos de tracción y flectores en su longitud del alabe  $\sigma = f_2(l)$ . La sección critica se encontrara, donde la relación

$\frac{\sigma_{\tau}}{\sigma}$  sea mínimo – en una distancia aproximada 20.....30 % de la longitud el álabe partiendo de la sección de la raíz. En las Fig. 5, se muestra el cambio de las magnitudes por la longitud y resaltado el lugar de la sección peligrosa del álabe para un álabe de turbina.



**Fig. 5** Gráficos para la determinación de la sección peligrosa del alabe de la turbina y el coeficiente de seguridad [5].

**VIBRACIONES DEL ALABE**

Las fuerzas desarrolladas en las turbinas, aun en período de régimen establecido, no son

rigurosamente constantes. En general, oscilan alrededor de un valor medio con cierta periodicidad. Este hecho es susceptible de dar lugar a fenómenos de resonancia que pueden presentar consecuencias funestas para la seguridad del material. En particular, los álabes que constituyen sistemas de masas repartidas que poseen una sucesión indefinida de frecuencias naturales de vibración, son elementos particularmente expuestos a los peligros de rotura que resultan de los esfuerzos alternados que se producen cuando coincide una de las frecuencias de excitación con una de las frecuencias propias del álabe.

El estudio de las vibraciones de un álabe plantea dos problemas:

- La determinación de las frecuencias propias.
- El examen de los impulsos excitadores.

La comparación de las cifras obtenidas permite determinar las posibles zonas de resonancia. El álabe se puede asimilar a una viga de sección constante o no, generalmente empotrada en el pie en un disco o rotor, pero cuyas uniones de cabeza pueden ser de diversas naturalezas. El álabe libre en la cabeza (empotrado-libre) puede vibrar a flexión según los dos ejes de inercia de la sección de empotramiento y a torsión alrededor del eje longitudinal. En lo que concierne a los álabes que forman un paquete por medio de una unión en cabeza, según que vibren en fase o no, se considera a la unión del extremo como apoyo simple o empotramiento, o aún puede no introducir más que una masa suplementaria. Para los álabes de sección constante, el cálculo permite obtener las frecuencias de las vibraciones a flexión con una buena aproximación.

**OSCILACIONES DE UNA PALETA AISLADA**

Al permanecer invariable la frecuencia de rotación del rotor, las fuerzas centrífugas son constantes y no dependen del tiempo. Si son constantes también los esfuerzos aerodinámicos del flujo de aire, entonces las paletas (álabes) sufrirán solo una deformación estática por flexión y tracción. En realidad, las fuerzas aerodinámicas tienen una componente variable periódica que provoca las oscilaciones forzadas de las paletas. En ciertas condiciones en los últimos

escalones de baja presión es posible la autoexcitación de las oscilaciones explosivas (de separación) y de las auto oscilaciones.

Las paletas pueden oscilar tanto respecto al eje de inercia mínimo, es decir, aproximadamente en el plano del disco (vibraciones tangenciales) como respecto al eje de inercia máximo (vibraciones axiales). Las vibraciones axiales están íntimamente ligadas con la vibración del disco y por eso deben considerarse como oscilaciones del sistema disco –paletas. Además de las vibraciones de flexión son posibles también las vibraciones torsionales de las paletas, sobre todo, de las paletas largas en los últimos escalones. Para simplificar solo examinaremos las vibraciones de flexión tangencial. Las características dinámicas más importantes de las paletas son las frecuencias de las oscilaciones naturales (frecuencias naturales) y las correspondientes formas principales de las vibraciones que pueden ser descubiertas teórica, o experimentalmente. Durante el examen teórico, las dimensiones transversales de la paleta se consideran pequeñas en comparación con su longitud y se usan los resultados obtenidos en el estudio de la flexión estática y de las oscilaciones de los vástagos (vigas).

El conjunto de la frecuencia natural *i*-ésima y de su forma principal correspondiente, se llama tono *i*-ésimo de las oscilaciones. La paleta tiene una cantidad infinita de los tonos de oscilaciones.

Desde el punto de vista teórico, la frecuencia mínima de las oscilaciones naturales del primer tono de una paleta aislada de sección constante rigidamente fijada en la sección de raíz y con el vértice libre, puede determinarse con la fórmula

$$f = \frac{0.56}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho_{mat} F}}$$

donde *l* es la longitud de la parte perfilada de la paleta; *EJ* es la rigidez flexora;  $\rho_{mat} F$  es la densidad lineal, es decir, la masa de una unidad de longitud de la paleta; *E* es el modulo de elasticidad; *J* es el momento de inercial de la sección (mínimo para las vibraciones tangenciales, máximo para las axiales);  $\rho_{mat}$  es la densidad del material de la paleta; *F* es el área de la sección transversal. La relación de las frecuencias naturales sucesivas de las vibraciones de flexión o el espectro de frecuencias es 1:6,27: 17,6: 34,4...

Para las paletas de sección variable el espectro de frecuencias de ordinario se vuelve más denso. Los valores de las frecuencias naturales teóricas se concuerdan con los datos experimentales solo para las llamadas flexibles con magnitud de  $\sqrt{\frac{E}{J}}$ . Para las paletas cortas y rígidas las frecuencias halladas experimentalmente resultan ser bastante menores que las calculadas según la fórmula teórica. La causa principal de esto consiste en que la unión de las paletas con el disco, no pueden ser absolutamente rígidas en ninguna de las estructuras. Para tomar en consideración la influencia de la fijación, se emplea el coeficiente de correlación  $\psi$ , que se determina por medio de experimentos y depende del tipo de raíz de la paleta y de la forma que tiene las vibraciones. Para el primer tono de las oscilaciones, el coeficiente se halla de acuerdo a la flexibilidad de la paleta. Entonces la frecuencia real de las oscilaciones naturales del primer tono en una paleta separada de sección constante de determina por la fórmula.

$$f_{pal} = \psi \frac{0.56}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho_{mat} F}} \quad (5)$$

Para los tonos más altos de las oscilaciones en comparación con el primero los valores numéricos del coeficiente se reducen

#### INFLUENCIA DE LA ROTACIÓN SOBRE LAS FRECUENCIAS NATURALES DE LA PALETAS [6].

Si el eje de una paleta en rotación se desvía respecto a la recta radial. La fuerzas centrífugas tratan de hacer regresar la paleta a la posición de equilibrio. Estas fuerzas se suman a las fuerzas de elasticidad y parece que aumenta la rigidez flexora de la paleta, por consiguiente, también la frecuencia de las oscilaciones naturales. La frecuencia natural de la paleta que gira, se llama frecuencia dinámica y puede presentarse de la siguiente forma siguiente:

$$f_{din} = \sqrt{f_{est}^2 + \bar{B} n^2}$$

Donde  $f_{est}$  es la frecuencia de las oscilaciones de una paleta que no gira, o frecuencia estática;  $\bar{B}$  es un coeficiente que depende de las características geométricas de la paleta, de la relación  $\frac{d_{med}}{l}$ , del

ángulo  $\beta$  (ángulo entre la componente axial de las fuerzas gasodinámicas y eje principal) y de la forma de oscilaciones;  $n$  es la frecuencia de rotación de la turbina. Si en calidad de línea elástica de flexión durante las oscilaciones se toman las formas principales de vibraciones de la paleta que no gira, o sea, se menosprecia su cambio en el campo de las fuerzas centrífugas, entonces el valor del coeficiente  $\bar{B}$  puede calcularse por medio de las formulas:

Para el primer tono

$$\bar{B}_1 = 0.785 \frac{d_{med}}{l} + 0.408 - \cos^2 \beta$$

Para el segundo tono

$$\bar{B}_2 = 4.32 \frac{d_{med}}{l} + 2.16 - \cos^2 \beta$$

### APLICACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE UN ALABE

#### Análisis estático

En la actualidad, el análisis estructural juega un papel importante en cualquier proyecto de esta naturaleza, por tanto, la ciencia busca dar diferentes soluciones para fenómenos internos que son tan complejos de reproducirlos y plasmarlos matemáticamente [7].

Una de estas soluciones es la utilización de programas especializados en simulación basados en métodos numéricos con diferentes algoritmos de solución como son los elementos finitos. Con los cuales esta siendo posible reproducir aceptablemente los fenómenos internos de la estructura

La ventaja que nos brinda el Cosmos/Works es de realizar diferentes cálculos a diferentes condiciones, esto es logrado en menor tiempo y en forma económica respecto a los métodos clásicos utilizados. En este capítulo desarrollaremos el análisis estructural del álabe y disco de la turbina, por el método de los elementos finitos que son característicos durante el desarrollo de un proyecto industrial enfatizando en el procedimiento de análisis. El objetivo es de conocer las deformaciones que se originan en la estructura y

a partir de estos valores determinar los valores que nos interesan.

### ANÁLISIS DEL ÁLABE DE LA TURBINA A GAS

El álabe es sin lugar a duda, un elemento que esta sometido a diversas cargas, aerodinámicos, térmicos, inerciales. Debido a esto es muy importante conocer los esfuerzos totales que experimenta dicha estructura y poder determinar su resistencia y operatividad durante el vuelo. Por tal motivo realizaremos un análisis por el método de los elementos finitos, con el programa de simulación COSMOS/WORKS. El FEM nos permite obtener los resultados mucho más preciso y contundentes que el cálculo por el método clásico, por otra parte, nos permite realizar un análisis considerando las particularidades geométricas del diseño. El tipo de análisis que vamos a desarrollar, es estático lineal, que es el tipo mas básico de análisis. El término lineal enfatiza la dependencia lineal de deformación y estática por que las fuerzas no varían con el tiempo, o que la variación de tiempo es insignificante y puede ignorarse. La ecuación del análisis estática es:

$$[P] = [K] \{U\}$$

Donde

- P es el vector de fuerzas aplicadas
- K es la matriz del sistema
- U es el vector de desplazamientos

La matriz de rigidez del sistema es generada automáticamente por cosmos/ Works basado en la geometría y las propiedades del material del sistema y los elementos [10]. El vector de desplazamientos es calculado por el COSMOS/ WORKS, posteriormente se procede al calculo de las tensiones, y otras que nos interesa.

### DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El presente trabajo comprende un análisis estructural del álabe bajo las cargas que son provocados por los gases y la rotación que son las fuerzas centrífugas (inerciales). Como resultado del análisis obtendremos valores numéricos de las tensiones existentes en la estructura. Gracias a estos resultados podemos

formular las observaciones y elaborar las recomendaciones necesarias para su posterior aceptación.

En los cálculos simplificados generalmente se consideran los esfuerzos de flexión de los gases y de tracción de las fuerzas centrifugas, sin embargo; con el método de los elementos finitos, además de estos se consideraran automáticamente otros esfuerzos que son generados por estas fuerzas (flexión de las fuerzas centrifugas, torsión a causa de las fuerzas de los gases).

### GEOMETRÍA

Las geometrías fueron generadas en SOLID/WORKS basados en las dimensiones de un trabajo que se realizó anteriormente de acuerdo a los cálculos gasodinámicos con los métodos clásicos.

### EL MATERIAL

El material utilizado en el álabes y disco son de un acero de alta calidad. Para nuestro análisis necesitamos las características mecánicas del material.

Study name **ÁLABE FUERZAS CENTRIFUGAS**  
(-Predeterminado-)

Material name	AISI 4340	Steel, annealed
Material source	COSMOS	library
EX	2.05E+011	N/m <sup>2</sup>
GXY	8E+010	N/m <sup>2</sup>
DENS	7850	kg/m <sup>3</sup>
SIGXT	7.45E+008	N/m <sup>2</sup>
SIGYLD	4.7E+008	N/m <sup>2</sup>
ALPX	1.23E-005	/Kelvin
KX	44.5	W/(m.K)
C	475	J/(kg.K)

Las cargas que actúan en el álabes fueron halladas en un trabajo anterior realizado por el autor en la Universidad de Kiev- Ucrania.

Por cálculos realizados anteriormente se tiene los siguientes datos:

Fuerzas tangenciales	197.665	N
Fuerzas axiales	266.4525	N
Velocidad de rotación	1230.8	Rad/s

### DESARROLLO DEL MODELO

Para el desarrollo del modelo se utilizaron elementos tetraédricos por tener gran convergencia.

Para realizar el análisis estructural por el método de los elementos finitos necesitamos elaborar el modelo de simulación que representa las características físicas de la estructura real [9].

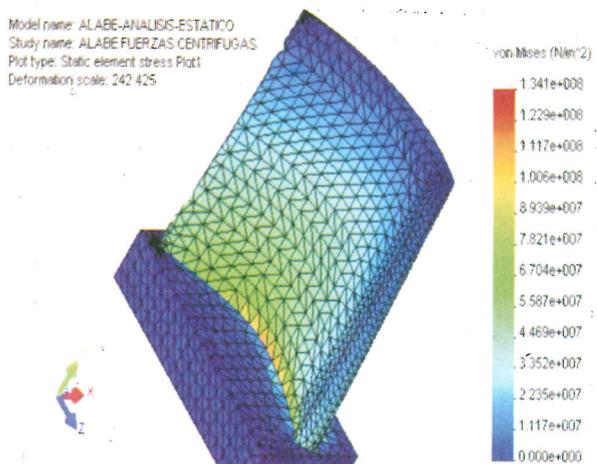
### ANÁLISIS DE RESULTADOS

El análisis de resultados se realiza en el ambiente de post-procesamiento del programa COSMOS/WORKS, se puede observar la distribución de los esfuerzos internos en la estructura e identificar cuales son los puntos con máxima deformación y máximo esfuerzo.

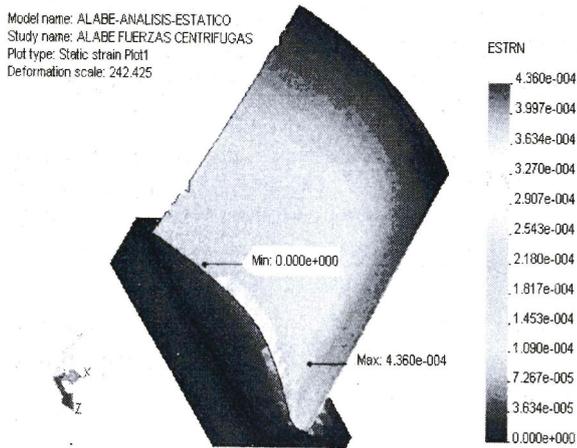
En el álabes de la turbina se puede observar que el esfuerzo en la sección de la raíz de la parte posterior es máxima, lo cual, concuerda con lo que se pensaba obtener.

Las magnitudes de esfuerzo obtenidas nos muestra que el elemento puede soportar dichas cargas, centrifugas y las gasodinámicas.

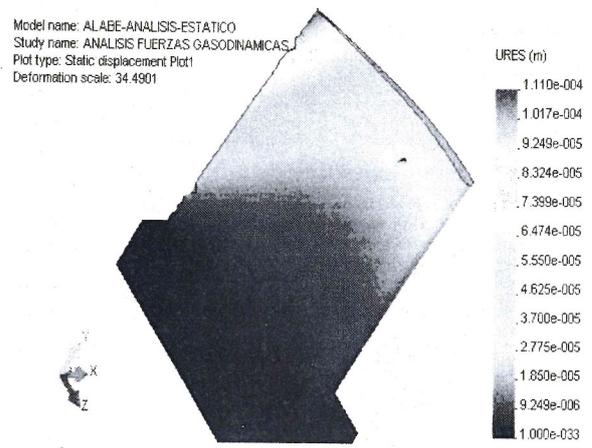
Para cada análisis se puede observar los esfuerzos de von Mises, las deformaciones, factor de seguridad. (Fig. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15).



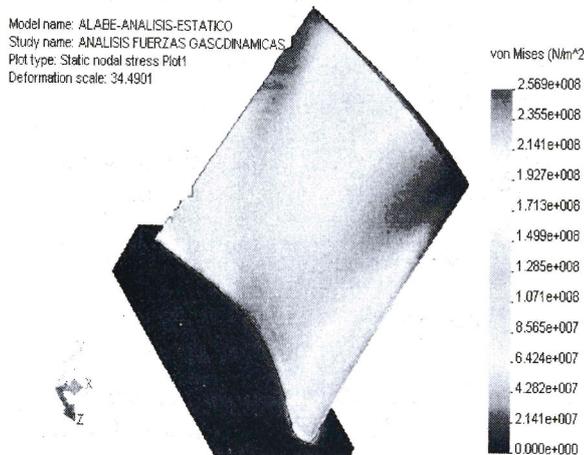
**Fig. 6** Resultados del análisis estático en el álabes, por acción de fuerzas centrifugas, esfuerzos de von Mises.



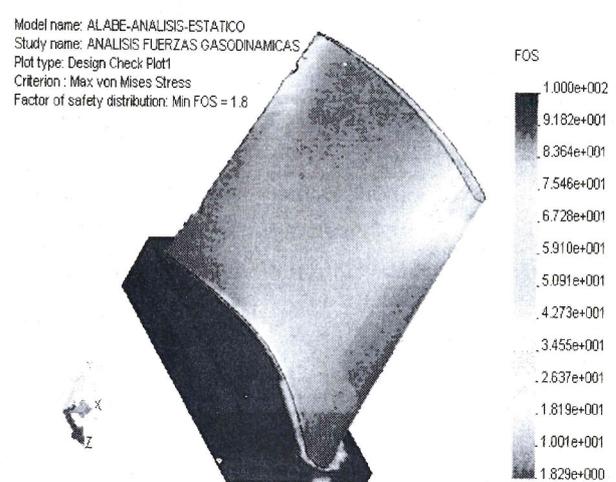
**Fig. 7** Resultados del análisis estático en el álabe, por acción de fuerzas centrifugas, deformaciones.



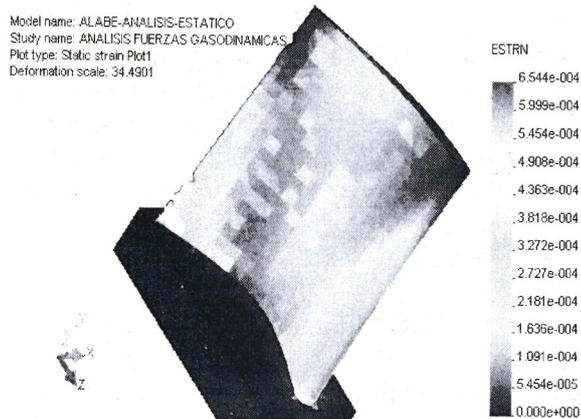
**Fig. 10** Resultados del análisis estático en el álabe, por acción de fuerzas gasodinamicas, desplazamientos.



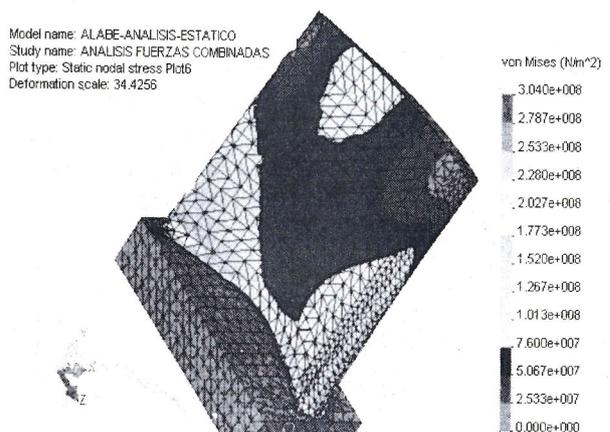
**Fig. 8** Resultados del análisis estático en el alabe, por acción de fuerzas gasodinámicas, esfuerzos de von Mises.



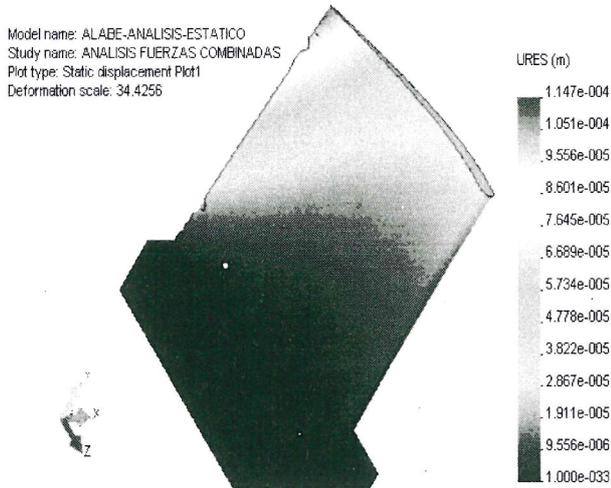
**Fig. 11** Resultados del análisis estático en el álabe, por acción de fuerzas gasodinamicas, factor de seguridad.



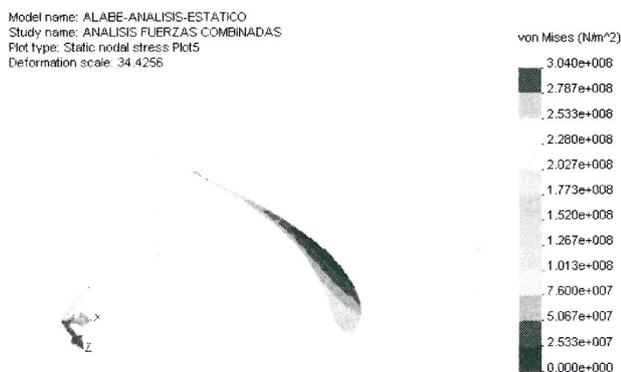
**Fig. 9** Resultados del análisis estático en el álabe, por acción de fuerzas gasodinámicas, deformaciones.



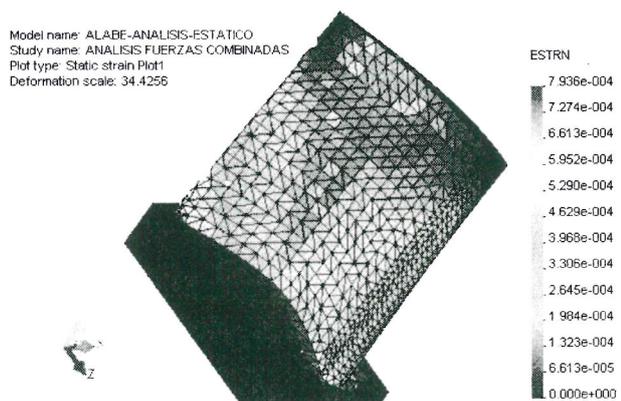
**Fig. 12** Resultados del análisis estático en el álabe, por acción de fuerzas combinadas, esfuerzos de von Mises



**Fig. 13** Resultados del análisis estático en el álabe, por acción de fuerzas combinadas, deformaciones.



**Fig. 14** Resultados del análisis estático en el álabe, por acción de fuerzas combinadas, en la sección de la raíz, esfuerzo de von Mises.



**Fig. 15** Resultados del análisis por acción de las fuerzas combinadas (gasodinámicas y centrífugas), deformación

### CALCULO DE LOS MODOS Y LAS FRECUENCIAS PROPIAS DE OSCILACIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL ÁLABE

A continuación desarrollaremos un problema de naturaleza dinámica que consiste en la determinación de los modos de oscilación de la estructura del álabe.

El análisis modal es el fundamento para una comprensión completa de las características dinámicas de la estructura.

El análisis modal permite realizar:

La evaluación de la interacción dinámica entre un componente y su estructura base de apoyo, si la frecuencia natural de la estructura base de apoyo es cercana a la frecuencia de operación del componente, puede haber amplificaciones dinámicas significante de las cargas.

Analizar los posibles cambios del diseño según las características dinámicas de la estructura.

El análisis modal se resuelve por la ecuación

$$[K] \{U\} + [M] \{\ddot{U}\} = 0$$

Donde  $K$  es la matriz de rigidez del sistema  
 $M$  es la matriz de masa del sistema basado en la geometría y propiedades.

### DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

La ecuación general obtenida en el numeral anterior nos sirve ahora para la solución a un problema dinámico, como es el caso de las oscilación libre de un álabe y disco de turbina. El análisis modal consiste en la determinación de las frecuencias naturales y la forma de una estructura. Las frecuencias naturales son las frecuencias que una estructura tendera a vibrar si es sujeto a una perturbación

### DESARROLLO DEL MODELO

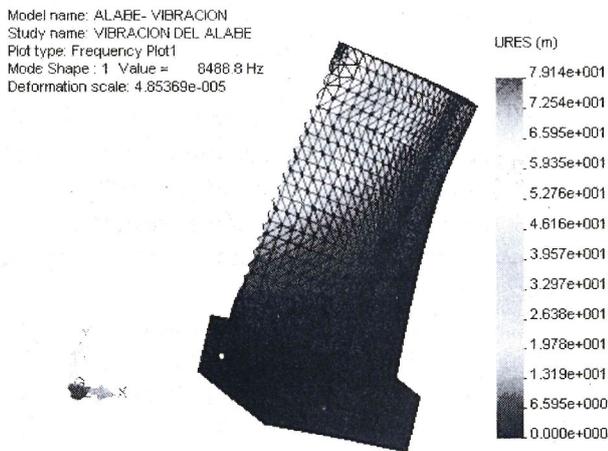
El desarrollo del análisis del álabe lo vamos a realizar en dos partes, una sin considerar ninguna fuerza externa y otra considerando la fuerza centrífuga, a fin de poder observar cómo actúa esta fuerza sobre las frecuencias naturales.

**Validación del modelo**

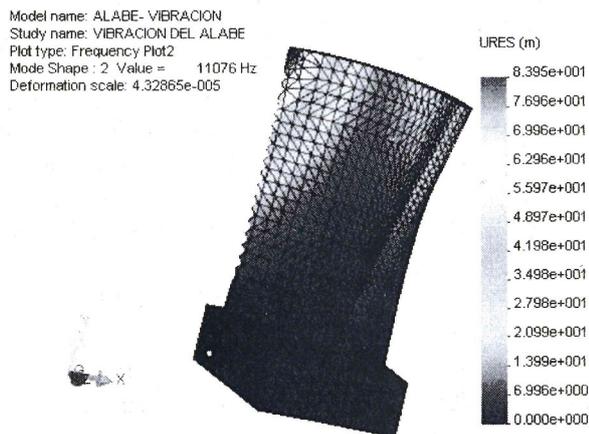
Cuando nosotros analizamos una estructura relativamente compleja es muy importante tener una idea de los valores que deberíamos obtener, para ello se realiza un modelo simplificado cuyos valores nos darán una idea de los que obtendremos al analizar la estructura compleja. En primer lugar, generamos la geometría en SOLID/WORKS, luego, generamos la malla en COSMOS/WORKS, e introducimos el material.

**ANÁLISIS DE RESULTADOS**

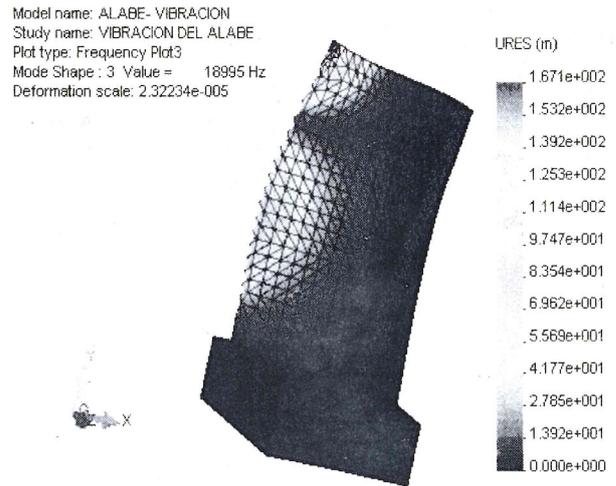
Como podemos observar las formas de las deformaciones son similares a las experimentales, y hallamos los 3 primeros modos y frecuencias de oscilación. (Fig. 16, 17, 18, 19, 20, y 21).



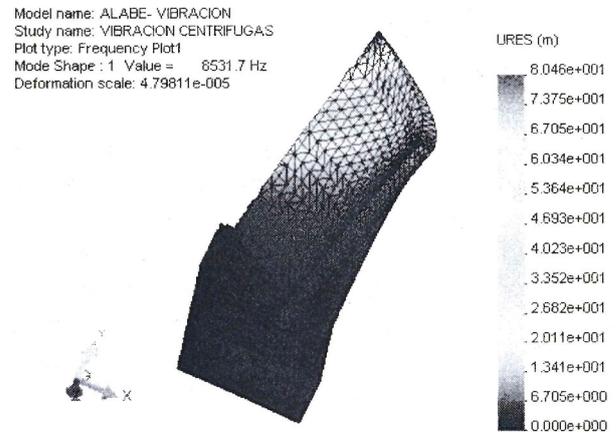
**Fig. 16** Modo 1 y frecuencia natural 1 de álabe, sin considerar las fuerzas centrífugas.



**Fig. 17** Modo 2 y frecuencia natural 2 de álabe, sin considerar las fuerzas centrífugas.



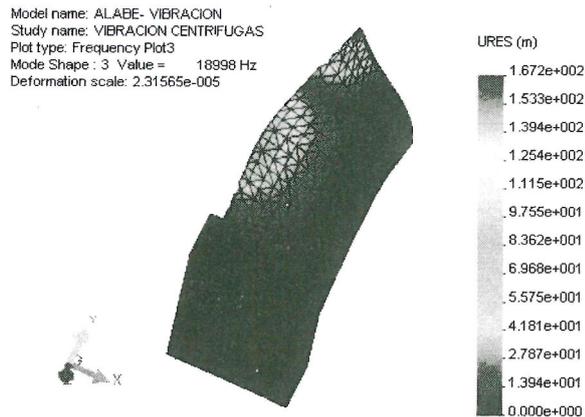
**Fig. 18** Modo 3 y frecuencia natural 3 del álabe, sin considerar las fuerzas centrífugas.



**Fig. 19** Modo 1 y frecuencia natural 1 del álabe, considerado las fuerzas centrífugas.



**Fig. 20** Modo 2 y frecuencia natural 2 del álabe, considerado las fuerzas centrífugas.



*Fig. 21 Modo 3 y frecuencia natural 3 del álabe, considerado las fuerzas centrifugas.*

## CONCLUSIONES

Hemos mostrado que el método de los elementos finitos es una poderosa herramienta de cálculo que permitirá al usuario desplazar su atención de las complicadas fases de cálculo a la fase de análisis de sus resultados. El cálculo por el método de los elementos finitos minimiza el riesgo a error que pueden cometerse durante el análisis en comparación con el método de cálculo tradicional. Ningún método automático podrá jamás sustituir a la experiencia y capacidad de análisis del ingeniero. La interpretación correcta de los listados y gráficos es tan importante como la preparación de un buen modelo

Para obtener resultados validos con el método FEM, se debe conocer perfectamente las características del problema que se está resolviendo. Es recomendable partir de una experiencia previa de cálculo mediante los métodos tradicionales para ir conociendo las ventajas y debilidades del método. Algunas veces resulta necesario desarrollar modelos simplificados de la estructura que se está analizando con el fin de validar los resultados del análisis.

Es necesario advertir que la modelación mediante el método FEM exige al usuario ser conscientes de los riesgos y de las ilusiones de resultados fáciles y rápidos que a veces acompañan al mismo. En particular, es necesario prestar el máximo de atención a los siguientes aspectos que pueden ser fuente de error. Si se usa el generador automático de mallas tomar en cuenta las condiciones iniciales y posteriormente revisar y modificarlos donde esta sea necesario, debido

a que un correcto dimensionamiento de la malla ayudara mucho en los resultados. Distinguir cuando una carga es puntual y cuando es distribuida. Muchas veces las cargas puntuales de gran magnitud generan deformaciones puntuales excesivas que no se verifican jamás en la realidad, simplemente porque las cargas que son aplicadas en la realidad no son generalmente puntuales como hemos modelado, muchas veces esto puede no ser importante y los resultados en la zona de interés pueden nos ser influenciados de la forma de la carga mientras que otras veces sí. Algunos programas disponen de los elementos rígidos que pueden servir para distribuir las cargas en modo uniforme en un conjunto de nodos produciendo entre todos estos la misma deformación

## REFERENCIAS

1. **Oñate, E.**, "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos". Centro internacional de métodos numéricos en ingeniería. Barcelona-España 1992.
2. **Escubachevski, A.**, "Motores de aviación de turbina a gas, diseño y cálculo de sus piezas". Construcción de maquinas. Moscú 1987.
3. **Losiski, B.**, "Construcción y resistencia de motores de aviación de turbina a gas". Transporte aéreo. Moscú 1992.
4. **Bor, V.**, "Calculo de resistencia de piezas de maquinas". Manual, Moscú 1996.
5. **Balina, N.**, "Resistencia y durabilidad de construcciones durante la fluencia". San Petersburgo 1997.
6. "Vibraciones mecánicas en ingeniería", Universidad Politécnica de Valencia – España, 1998.
7. **Willems, F. R.**, "Cálculo de resistencia de estructuras por métodos matriciales y de elementos finitos". Curso UNI, Lima – Perú 1998
8. **Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.**, "El método de los elementos finitos". Barcelona – España, 1993.
9. **Guía de usuario**, "Cosmos/works". Estados Unidos, N.Y. 2006.
10. **Tutoriales**, "Cosmos/Works" Estados Unidos, N.Y. 2006.

Correspondencia: [ubaldoytito@yahoo.com](mailto:ubaldoytito@yahoo.com)

Recepción de originales: agosto 2006

Aceptación de originales: noviembre 2006

