

Modelo matemático aplicado a molienda discontinua "Batch"

Mathematical modelling applied to the "Batch" milling process

Edgar Pérez¹, Elbert Pérez¹, Luis Alvarado¹,
José Corimanya¹

¹Facultad de Ingeniería Geológica Minera y Metalúrgica (FIGMM), Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru N° 210- Rímac- Lima

Recibido : 23/03/2017 Aceptado: 03/05/2017

RESUMEN

El modelo matemático aplicado a molienda "batch" (a nivel laboratorio), es una herramienta muy importante para llegar a simular y luego predecir el producto granulométrico de cierto mineral tratado; esto es por cada cierto intervalo de tiempo transcurrido de molienda, obtener su respectivo análisis granulométrico reflejado a nivel laboratorio, que luego será corroborado con datos reales y además poder verificar su buena aproximación. El modelo involucra a las funciones selección y fractura quienes son constituidos por los tamaños granulométricos de cada malla en la referida distribución mineral. Consiguiendo de esta manera predecir en forma efectiva y confiable, evitando costo y sobre todo tiempo, sin la necesidad de realizar el proceso de molienda para cada predicción de molienda "batch".

Palabras clave.-molienda, "batch", simular, análisis granulométrico, fractura, mineral.

ABSTRACT

Mathematical modelling applied to "batch" milling (at experimental level), is a very important tool to simulate and predict the granulometric yield of a given treated ore; this means, for a given duration of milling operation, to obtain an estimate of the corresponding granulometric analysis, which can then be tested with real data later on, to verify the estimates. The model involves the selection and fracture functions depending on each mesh size in the ore distribution. This will allow the prediction of effective and reliable results, saving costs and more importantly, time, without the need to perform the milling process for each prediction of "batch" milling.

Key words: milling, "batch", simulation, granulometric, analysis, fracture, ore.

INTRODUCCIÓN

El modelo matemático a tratar es el que mejor se identifica en el proceso de molienda "batch" y se basa en que cierta muestra se dispone con una distribución de tamaños sobre un rango de partículas continuas y se hace necesario discretizar (para manejar los datos), generalmente con una progresión geométrica de razón de $\sqrt{2}$, generando intervalos sucesivos.

Establecidos estos intervalos de tamaños, el análisis granulométrico consiste en determinar que fracción en peso corresponde a cada intervalo, para ello se utiliza una serie de tamices (con sus aberturas correspondientes), en la cual se introduce el material por un tiempo determinado donde las partículas quedaran distribuidas en sus respectivos rangos de tamaños, vale decir que en cada tamiz quedará retenida la muestra mineral.

Bajo esta premisa se establece que el proceso de molienda involucra un problema de balance poblacional. Si un material es sometido a un tiempo 't' de molienda, la cantidad de partículas de cierto

intervalo disminuirá, consecuentemente aumentara la cantidad por efecto de la fractura de partículas de intervalos de tamaños mayores.

El modelo en proceso de molienda requiere básicamente de las funciones de selección y fractura que a continuación será mostrado.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO A SEGUIR

Se muestra a continuación el significado de las siguientes simbologías a ser utilizadas. [3 y 4]

- $\bar{m}_{(0)}$, $\bar{m}_{(t)}$: distribución granulométrica de la alimentación y producto en un proceso de molienda, expresado en una matriz columna: $n \times 1$.
- \bar{S} : función selección, matriz diagonal de tamaño: $n \times n$.
- \bar{B} : función fractura acumulada, matriz de tamaño: $n \times n$.
- \bar{b} : función fractura parcial, matriz triangular inferior de tamaño: $n \times n$.

Correspondencia:
ademaredgar@yahoo.com

- \bar{I} : matriz identidad de tamaño: $n \times n$.
- \bar{x} : matriz de proceso (que depende de las funciones \bar{b} y \bar{S}), de tamaño: $n \times n$. La denominación n quedará definida o limitada por la variedad o cantidad de tamices a ser considerados. [2,6 y 7].

Cabe precisar las siguientes matrices y funciones (manifestaciones matemáticas), que intervendrán en el proceso de molienda:

Matriz columna:

$$\begin{matrix} \text{Alimento: } \bar{m}_{(0)} & & \text{Producto: } \bar{m}_{(t)} \\ \bar{m}_{(0)} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}_{n \times 1} & ; & \bar{m}_{(t)} = \begin{bmatrix} m_{(1)} \\ m_{(2)} \\ m_{(3)} \\ \vdots \\ m_{(n)} \end{bmatrix}_{n \times 1} \end{matrix}$$

Considerando n al número de tamices utilizados en la distribución granulométrica.

Función selección: S_i

Refiere básicamente que tan rápido disminuye el material correspondiente a un intervalo determinado de partículas.

$$S_{(x)} = \frac{a \cdot x^\alpha}{1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^\Omega}$$

donde:

X : tamaño de abertura mínima

además:

$\Theta_s = |a, \alpha, \Omega, x_0|$: parámetros que tomaran sus valores arbitrarios, dentro de cada rango ya establecido experimentalmente [3, 4 y 5].

$$\begin{matrix} 0 \leq a \leq 100 \\ 0 \leq \alpha \leq 100 \\ 0 \leq \Omega \leq 100 \\ x_0 \geq 0 \end{matrix}$$

Matricialmente:

Función Fractura Acumulada: $B_{(x,y)}$

Esta función nos representa proporcionalmente las partículas de tamaño inicial 'y'; y que luego aparecen en la gama granulométrica de tamaño menor a 'x', después de la fragmentación.

$$\bar{S}_{(n \times n)}: \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & S_2 & 1 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_n \end{bmatrix}_{(n \times n)}$$

Además la distribución granulométrica obtenida después de la fragmentación de una partícula, es independiente del tamaño inicial de la misma [4].

$$B_{(xy)} = \begin{cases} k \left(\frac{x}{y}\right)^{n_1} + (1-k) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{n_2} & (x < y) \\ 1 & x \geq y \end{cases}$$

donde:

x : tamaño-granulométrico-menor.(D_i)

y : tamaño-granulométrico-promedio.(d_{pi})

además:

$\Theta_B = |k, n_1, n_2|$: parámetros que cada uno tomará su valor arbitrario, dentro de su rango ya establecido experimentalmente [3, 4 y 5].

$$\begin{matrix} 0 \leq k \leq 1 \\ 0 \leq n_1 \leq 10 \\ 0 \leq n_2 \leq 10 \end{matrix}$$

Matricialmente:

$$\bar{B}_{(x,y)}: \begin{bmatrix} B_{11} & 1 & 1 & \dots & \cdot & 1 \\ B_{21} & B_{22} & 1 & \dots & \cdot & 1 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 1 \\ B_{n1} & B_{n2} & B_{n3} & \dots & \cdot & B_{nn} \end{bmatrix}_{(n \times n)}$$

Función Fractura Parcial: $b_{i,j}$

Función fractura ó fracción de partículas que aparecen en el intervalo de tamaños i proveniente de la reducción de material del intervalo de tamaño j . [5]

La matriz \bar{b} se calculará por la siguiente ecuación:

$$\bar{b} = \bar{R}' \cdot [\overline{\text{ones}} - \bar{B}]$$

donde:

$$\bar{R}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\overline{\text{ones}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Matricialmente:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}_{(n \times n)}$$

Matriz de Proceso: \bar{x}

Donde confluyen las funciones de \bar{S} y \bar{b} principalmente.

Matricialmente:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & \dots & \dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & \dots & x_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

MODELO MATEMÁTICO A SEGUIR

La ecuación de quiebra de la molienda discontinua ("batch"): [4, 7 y 8].

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = -S_i \cdot m_i \cdot (t) + \sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j} \cdot S_j \cdot m_j(t) \quad \dots (1)$$

Donde:

- n : número de intervalo de tamaños.
- i : sub índice para designar un intervalo de tamaños, i : 1, 2, 3 ... n
- i : 1, corresponde al intervalo de partículas más gruesas.
- i : n, corresponde al intervalo de partículas más finas.
- S_i : función selección.
- b_{i,j} : función fractura fraccionada.
- m_i : fracción en peso correspondiente a los intervalos de tamaños.

Las partículas salen del intervalo e inmediatamente los productos aparecen en otros intervalos menores y su expresión es el siguiente.

$$S_j \cdot m_j(t) \quad \dots (1.1)$$

La tasa de generación de material en el intervalo a través de la entrada de productos de quiebra en los intervalos 'j' de mayor tamaño (j = i - 1, i - 2, ..., 3, 2, 1); representado por la expresión.

$$\sum_{j=i}^{i-1} b_{i,j} \cdot S_j \cdot m_j(t) \quad \dots (1.2)$$

b_{i,j}: es la fracción de partículas originales de tamaño 'j' que después del fracturamiento (de quiebra), aparecen en el intervalo 'i'.

La expresión (1) también puede expresarse matricialmente como:

$$\frac{dm(t)}{dt} = -(\bar{I} - \bar{b}) \cdot \bar{S} \cdot \bar{m}(t) \quad \dots (2)$$

haciendo:

$$\bar{A} = -(\bar{I} - \bar{b}) \cdot \bar{S} \quad \dots (2.1)$$

Además integrando respecto al tiempo las funciones constantes \bar{b} , \bar{S} y \bar{A} resulta:

$$\bar{m}(t) = e^{-A(t-t_0)} \cdot \bar{m}(t_0) \quad \dots (3)$$

Que transformando por similaridad:

$$e^{\bar{A} \cdot t} = \bar{T} \cdot \bar{A} \cdot \bar{T}^{-1} \quad \dots (3.1)$$

Finalmente resulta:

$$\bar{m}(t) = \bar{T} \cdot \bar{A} \cdot \bar{T}^{-1} \cdot \bar{m}(0) \quad \dots (4)$$

Sintetizando:

$$\bar{m}(t) = \bar{x} \cdot \bar{m}(0) \quad \dots (5)$$

donde:

$\bar{m}(0)$: vector columna de las fracciones en peso sin moler.

$\bar{m}(t)$ vector columna de las fracciones en peso a un tiempo 't' de molienda.

\bar{x} : matriz modelo

Constituyendo la matriz T:

- \bar{T} : matriz cuadrada constituida por \bar{T}_i matrices columna.

$$\bar{T}_i = [(\bar{b} - \bar{i}) \cdot \bar{s} + S_i \cdot \bar{i} + \bar{J}_i]^{-1} \cdot \psi_i \quad \dots (6)$$

donde:

$$\bar{T} = [\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3 \dots \bar{T}_n] \quad \dots (6)$$

Tomando la forma matricial:

$$T_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} T_{1,1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n-1,1} & T_{n-1,2} & \cdot & \cdot & T_{n-1,n-1} & 0 \\ T_{n,1} & T_{n,2} & \cdot & \cdot & T_{n,n-1} & T_{n,n} \end{bmatrix}$$

- I: matriz identidad.

$$\psi_i = \begin{cases} 1; & i = k \\ 0; & i \neq k \end{cases}$$

$$\bar{J}_i = \text{Diag} \bar{\psi}_i$$

Constituyendo la matriz A

$$\bar{A} = \text{diag} \left(e^{-S_i \cdot t} \right)$$

Tomando la forma matricial:

$$A_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} e^{-S_1 \cdot t} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & e^{-S_2 \cdot t} & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & e^{-S_{n-1} \cdot t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & e^{-S_n \cdot t} \end{bmatrix}$$

APLICACIÓN REAL

Distribución granulométrica del alimento (\bar{f}), del producto (\bar{p}), reportado de laboratorio, según tabla 1.

Tabla 1. Distribución Granulométrica-Datos Experimentales

I.T	Malla	Tamaño (micrones)		Tiempo de Molienda (minutos)						
		Máximo	Mínimo	0	0,5	1	3	7	15	30
1	10/14	2000	1410	13.1	6.71	5.28	1.76	0.15	0.00	0.01
2	14/20	1410	841	23.0	14.5	10.9	3.16	0.32	0.01	0.02
3	20/30	841	595	9.59	8.30	6.39	1.53	0.16	0.00	0.02
4	30/40	595	420	9.20	9.97	9.03	2.65	0.23	0.00	0.04
5	40/50	420	297	6.27	8.00	8.28	4.32	0.38	0.02	0.05
6	50/70	297	210	6.90	9.36	10.6	10.1	1.94	0.08	0.06
7	70/100	210	150	4.51	6.45	7.60	10.5	4.98	0.24	0.05
8	100/150	150	104	4.96	6.77	8.05	13.5	13.2	2.38	0.19
9	150/200	104	74	3.29	4.52	5.28	9.36	13.9	8.05	1.02
10	200/270	74	53	3.25	4.51	5.61	9.43	14.8	16.9	7.22
11	270/400	53	38	1.79	2.77	3.22	5.15	7.55	11.9	10.6
12	0	38	0	14.2	18.1	19.8	28.5	42.1	60.4	80.7

De acuerdo a la cantidad de mallas utilizadas en la distribución granulométrica del alimento y producto quedará definido el tamaño matricial de las funciones que intervienen en el modelamiento matemático; es decir para n igual a 12.

Constituyendo las siguientes: matriz-función.

Primero: Del cuadro 1.1, obtenemos la matriz $\bar{m}(0)$:

$$\bar{m}(0) = \begin{bmatrix} 13.1 \\ 23.0 \\ 9.59 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1.79 \\ 14.20 \end{bmatrix}_{12 \times 1}$$

$$\bar{S} : \begin{pmatrix} 3.9E-09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4E-08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.4E-08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.1E-08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9E-07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.6E-07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1E-06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7E-06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.2E-06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4E-05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.3E-05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Segundo: Asumiendo en las siguientes funciones de \bar{S} y \bar{B} , los siete valores arbitrarios, obviamente dentro de su rango respectivo. [3 y 4]

Siendo: $a = 1, \alpha = 1, \Omega = 3.5, x_0 = 0.705$

De acuerdo al valor de los cuatro parámetros arbitrarios tomados para la función \bar{S} , su expresión matricial resulta:

Función Selección: \bar{S}

Función Fractura Acumulada: \bar{B}

$$\bar{B} : \begin{pmatrix} 0.668 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.282 & 0.564 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.185 & 0.318 & 0.671 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.127 & 0.204 & 0.359 & 0.669 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.089 & 0.139 & 0.225 & 0.359 & 0.670 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.063 & 0.097 & 0.152 & 0.226 & 0.360 & 0.670 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.045 & 0.069 & 0.107 & 0.154 & 0.229 & 0.365 & 0.678 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.031 & 0.048 & 0.074 & 0.105 & 0.151 & 0.223 & 0.352 & 0.657 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.022 & 0.034 & 0.052 & 0.074 & 0.106 & 0.152 & 0.224 & 0.358 & 0.675 & 1 & 1 & 1 \\ 0.016 & 0.024 & 0.037 & 0.053 & 0.075 & 0.107 & 0.153 & 0.228 & 0.369 & 0.680 & 1 & 1 \\ 0.011 & 0.017 & 0.027 & 0.038 & 0.054 & 0.076 & 0.108 & 0.156 & 0.234 & 0.371 & 0.680 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Función Fractura fraccionada: \bar{b}

Función que es dependiente de la función \bar{B} principalmente.

Matricialmente tenemos: \bar{b} :

$$\bar{b} : \begin{pmatrix} 0.332 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.386 & 0.436 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.097 & 0.246 & 0.329 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.058 & 0.114 & 0.312 & 0.331 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.038 & 0.065 & 0.134 & 0.310 & 0.330 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.026 & 0.042 & 0.073 & 0.134 & 0.311 & 0.330 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.018 & 0.028 & 0.045 & 0.072 & 0.131 & 0.305 & 0.322 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.014 & 0.021 & 0.033 & 0.049 & 0.078 & 0.142 & 0.326 & 0.343 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.009 & 0.014 & 0.021 & 0.031 & 0.045 & 0.071 & 0.128 & 0.299 & 0.325 & 0 & 0 & 0 \\ 0.006 & 0.010 & 0.015 & 0.021 & 0.030 & 0.045 & 0.070 & 0.129 & 0.306 & 0.320 & 0 & 0 \\ 0.004 & 0.007 & 0.011 & 0.015 & 0.021 & 0.031 & 0.045 & 0.072 & 0.135 & 0.308 & 0.320 & 0 \\ 0.011 & 0.017 & 0.027 & 0.038 & 0.054 & 0.076 & 0.108 & 0.156 & 0.234 & 0.371 & 0.680 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricialmente: \bar{X} resulta:

$$\bar{X} : \begin{pmatrix} 1 & -2E-16 & -9E-17 & 2E-16 & -9E-17 & -9E-17 & 9E-17 & 9E-17 & -9E-17 & 9E-17 & 0 & 0 \\ 6E-08 & 1 & -1E-16 & -1E-16 & -3E-17 & -1E-16 & 1E-16 & 1E-16 & 7E-17 & 3E-17 & 0 & 0 \\ -5E-09 & 1E-07 & 0.999999 & 2E-17 & -2E-16 & 1E-16 & -1E-16 & 2E-16 & -1E-16 & -8E-17 & 0 & 0 \\ 9E-09 & -2E-09 & 4E-07 & 0.999999 & -1E-16 & -1E-16 & -8E-17 & 3E-18 & -8E-17 & 2E-16 & -6E-17 & 0 \\ 5E-10 & 3E-08 & -1E-08 & 9E-07 & 0.999997 & 2E-17 & 2E-16 & -1E-16 & 8E-17 & 1E-16 & 3E-17 & 0 \\ 3E-09 & 5E-09 & 8E-08 & -3E-08 & 2E-06 & 1 & -4E-18 & -2E-16 & -6E-17 & -2E-16 & 2E-17 & 0 \\ 8E-10 & 9E-09 & 9E-09 & 2E-07 & -1E-07 & 5E-06 & 1 & 3E-17 & -4E-17 & -1E-16 & 6E-17 & 0 \\ 1E-09 & 4E-09 & 3E-08 & 3E-08 & 5E-07 & -8E-08 & 1E-05 & 1 & -2E-17 & 8E-17 & 3E-17 & 0 \\ 5E-10 & 4E-09 & 9E-09 & 6E-08 & 5E-08 & 1E-06 & -7E-07 & 3E-05 & 1 & 2E-16 & 1E-17 & 0 \\ 5E-10 & 2E-09 & 1E-08 & 2E-08 & 1E-07 & 1E-07 & 3E-06 & -1E-06 & 7E-05 & 1 & -6E-17 & 0 \\ 3E-10 & 2E-09 & 5E-09 & 2E-08 & 5E-08 & 3E-07 & 2E-07 & 6E-06 & -3E-06 & 0.000 & 1 & 0 \\ 7E-10 & 4E-09 & 1E-08 & 5E-08 & 2E-07 & 5E-07 & 2E-06 & 6E-06 & 2E-05 & 0.000 & 0.000 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo: $k = 1, n_1 = 10, n_2 = 10$

Considerando los tres parámetros arbitrarios para la función \bar{B} , se consigue constituir la expresión matricial siguiente: \bar{B}

Matriz de Proceso: \bar{X}

Función que es dependiente de las funciones: \bar{S} y \bar{B} respectivamente [1, 3 y 4].

Si habituamos en la relación (5) la matriz \bar{x} (para un tiempo de 15 minutos de molienda) y reemplazamos $\bar{m}(0)$, el modelo matemático me arroja un producto granulométrico (ver tabla 2), observándose cierta divergencia comparativa respecto a la data real. Así mismo se visualiza la tendencia hacia lo real, con error equivalente a 0.343 respectivamente.

Tabla 2 -Datos Comparativos

$\bar{m}(15)_{Md}$	$\bar{m}(15)_{Dt}$
0.131	0
0.23	0
0.096	0
0.092	0
0.063	0
0.069	0.001
0.045	0.002
0.05	0.024
0.033	0.081
0.032	0.169
0.018	0.119
0.142	0.604

- $\bar{m}(15)_{Dt}$: data real reportado.
- $\bar{m}(15)_{Md}$: data del modelo.

Ya se ha conseguido alcanzar **cierta tendencia** comparativa entre los productos granulométricos obtenidos de la data y del modelo, al considerar los siete valores arbitrarios.

Finalmente se tratará de minimizar el error ya contraído y llegar a establecer una aproximación que permita asemejar y representar a lo real, obviamente con el uso de solver-excel.

Tercero: Utilizando solver-excel conseguimos:

- Que el error tienda a cero y de recalculer los siete parámetros arbitrarios, consecuentemente con sus valores óptimos.
- Que el modelo adquiera una buena aproximación hacia lo real; con un error mínimo de 0.0051 respectivamente.

Finalmente poder corroborar la afinidad de los datos. (tabla 3).

Tabla 3: Corroborando Datos

$\bar{m}(15)_{Md}$	$\bar{m}(15)_{Dt}$
0	0
0	0
0	0
0	0
0	0
0.003	0.001
0.004	0.002
0.032	0.024
0.088	0.081
0.135	0.169
0.149	0.119
0.602	0.604

RESULTADOS Y DISCUSIONES

Considerando inicialmente los siete valores arbitrarios en el modelo, se consigue vislumbrar **cierta tendencia** hacia la data granulométrica real del producto con un error de 0.343.

Sin embargo haciendo que los errores por cada tamaño granulométrico sea mínimo se consigue la **aproximación** deseada con 0.0051 (de error modelo); con lo cual también se obtuvo el recalcu de todos los valores paramétricos óptimos siguientes (mediante solver-excel):

$$\begin{aligned}
 K &= 0.0838 \\
 n_1 &= 0.0763 \\
 n_2 &= 2.0110 \\
 a &= 7.2870 \\
 \alpha &= 1.5243 \\
 \Omega &= 2.6073 \\
 X_0 &= 0.4956
 \end{aligned}$$

Se observa la consistencia que adquiere el modelo matemático, pues las lecturas granulométricas comparativas data -modelo, ya se confunden (tabla 3).

La función de proceso \bar{x} de la relación (5), ampara e involucra a \bar{S} y \bar{B} ; como una combinación de probabilidad de fracturamiento poblacional a través del proceso de molienda "batch".

CONCLUSIONES

Los parámetros hallados en condición mínima de error, adquieren la denominación de valores óptimos, quienes hacen posible que el modelamiento matemático este apto para poder simular (asemejar), y lograr predecir la ocurrencia granulométrica a través del proceso de molienda.

Es decir simular la granulometría de salida de un molino), en función de la granulometría de entrada y del proceso de reducción de tamaño que sufre el material dentro del equipo. Entonces para cada intervalo de tiempo de molienda podemos simular y predecir su correspondiente producto granulométrico (tabla 4).

Tabla 4: Distribución Granulométrica- Simulados por Regresión No Lineal

I.T	Malla	Tamaño (micrones)		Tiempo de Molienda(minutos)							
		Máximo	0	0.5	1	3	7	15	30	0	
1	10/14	2000	12.41	8.50	5.83	1.28	0.06	0.00	0.00	12.41	
2	14/20	1410	22.72	14.69	9.56	1.82	0.08	0.00	0.00	22.72	
3	20/30	841	9.81	9.14	7.42	2.05	0.10	0.00	0.00	9.81	
4	30/40	595	9.24	9.28	8.30	3.11	0.19	0.00	0.00	9.24	
5	40/50	420	6.35	8.29	8.87	5.32	0.56	0.00	0.00	6.35	
6	50/70	297	6.98	8.80	10.00	8.94	2.07	0.03	0.00	6.98	
7	70/100	210	4.71	6.78	8.61	11.47	5.84	0.41	0.00	4.71	
8	100/150	150	4.94	6.57	8.26	13.23	12.12	3.18	0.12	4.94	
9	150/200	104	3.31	4.42	5.64	10.35	14.09	8.76	1.52	3.31	
10	200/270	74	3.17	3.85	4.64	8.10	13.09	13.53	6.17	3.17	
11	270/400	53	1.66	2.12	2.66	5.11	9.68	13.94	11.79	1.66	
12	0	38	14.71	17.55	20.22	29.21	42.12	60.15	80.40	14.71	

AGRADECIMIENTOS

Gracias al Señor Decano de la FIGMM. MSc. Alberto Landauro Abanto; Por su apoyo incondicional para el desarrollo de nuestras actividades relacionadas con el estudio de investigación concluidos.

Agradecimiento a la Asociación Docente de la UNI (ADUNI) por su apoyo en la realización del tema de investigación compartiendo sus conocimientos y experiencias.

Agradecidos al Ing. Augusto Teves Rojas jefe de la Biblioteca de la FIGMM. Por su experiencia en guiarnos a las fuentes más importantes de nuestra investigación.

REFERENCIAS

- [1] J. Lynch A., W. Fuerstenau D. Circuito de trituración y molienda. Desarrollo en los procesos minerales - simulación optimización - diseño y control. Edit. Rocas y minerales. 1º Edición 1980.
- [2] Ayres Hidalgo Fernando A., Torres Ponce Miguel T. Técnicas matemáticas aplicadas al balance de materia. Ingeniería y computación EIRL. Arequipa 1998.
- [3] Leonel Gutiérrez R, Jaime Sepúlveda. Dimensionamiento y optimización de plantas concentradoras mediante técnicas de modelación matemática. Centro de investigación minera metalúrgica 1986.
- [4] G .Austin Leonard, Concha A. Fernando Diseño y simulación de circuitos de molienda y clasificación. Programa iberoamericano de ciencia y tecnología para el desarrollo. Subprograma de tecnología mineral. Red de fragmentación XII-A.
- [5] Oblad A. Edward. GS technologies / control international. Salt. Lake City, Utah, USA. Modelos matemáticos de conminución y sus aplicaciones en la industria mineral: nov.1994.
- [6] Jorge Menacho, Javier Jofre R. Yadranka Zickovic D. 'Temas Especiales de Conminución de Minerales', Cytel, 1995.
- [7] Hong Yong Solhn, Milton Wadsworth. 'Cinética de los procesos de la Metalurgia Extractiva'. Editorial Trillas, primera Edición 1986.
- [8] Errol G. Kelly, David J. Spottiswood. 'Introducción al Procesamiento de Minerales'. Editorial Limusa. Primera Edición 1990.